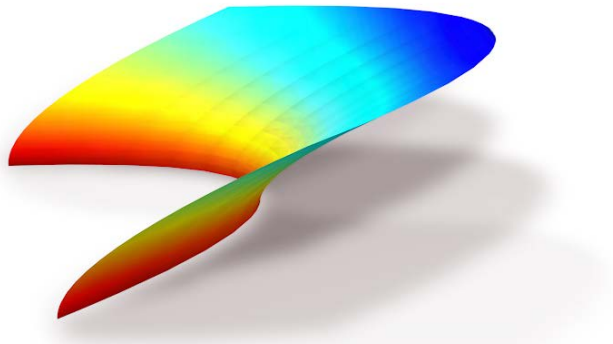
Welch Labs



Números Imaginários são Reais

LIVRO TEXTO

Tradução: Nícolas Bastos Bággio

Olá!

"Imagine que você tivesse uma aula de arte em que somente lhe ensinassem a pintar uma cerca e jamais lhe mostrassem as pinturas dos grandes mestres como Leonardo da Vinci e Picasso? É claro que você diria "Eu odeio arte". Você não era bom em pintar a cerca mas você jamais saberia o que há além na arte. Infelizmente, é exatamente isto que acontece com a matemática. Eu quero que as pessoas descubram a mágica do mundo da matemática, como se fosse um universo paralelo, que muitos de nós nem mesmo está ciente de sua existência."

- Edward Frenkel

Sobre os Exercícios

Como a citação acima diz muito mais do que eu posso, os exercícios que a gente faz nas aulas de matemática são frequentemente terríveis. Em algum ponto você já deve ter feito os tipos de exercício como pintar a cerca onde te pediram para fazer o mesmo tipo de problema várias e várias vezes com mínimas mudanças aos números. Eu odeio isso. É pouco inspirador e um mau uso do seu cérebro. Dito isso, eu prometo que eu fiz o meu melhor para evitar este tipo de problema aqui. Cada exercício está aqui por um motivo. Sem pintar a cerca.

É claro, esta é apenas metade da equação. Como qualquer outra coisa, para obter o verdadeiro valor, você precisa se esforçar de verdade. E se você se esforçar, eu te prometo que vai valer a pena. Os números imaginários são ricos e belos, e sua história é fascinante. Entender de verdade este assunto vai te dar uma perspectiva tremenda sobre o poder e a beleza da matemática moderna e da ciência. Os exercícios para cada seção estão divididos em 4 partes:

Exercícios	Descrição
Discussão	Feitos para estimular, você adivinhou, discussão! Não há respostas certas ou erradas.
Broca	Números Imaginários podem ser difíceis, e a falta de conceitos chave pode tornar esse assunto bem menos divertido - as Brocas foram feitas para garantir que você entenda melhor os conceitos chave.
Pensamento Crítico	Os exercício Pensamento Crítico são onde as coisas ficam boas, estes exercícios foram especialmente feitos para questionar suas suposições matemática e aumentar suas habilidades.
Desafio	Estas questões são bem difíceis.

Sobre as Soluções

Acredito firmemente em um feedback rápido quando você está aprendendo conceitos novos. É por isso que você vai encontrar as respostas dos exercícios no final do livro. Convido você a verificar seu trabalho à medida que avança. Obviamente, isto não significa que você deva voltar para o final do livro assim que as coisas ficarem difíceis, um pouco de sofrimento e incerteza é sempre bom.

Aproveite
@stephencwelch

© Stephen Welch, 2016

Sumário

"Hey, então o que há neste livro?"

Parte	Título	Páginas
1	Introdução	4-9
2	Um Pouco de História	10-17
3	O Problema de Cardano	18-21
4	A Solução de Bombelli	22-26
5	Os Números são Bidimensionais	28-32
6	O Plano Complexo	34-38
7	Multiplicação Complexa	40-45
8	A Magia da Matemática	46-50
9	Fecho	52-57
10	Funções Complexas	58-64
11	Vagando em Quatro Dimensões	66-71
12	A Solução de Riemann	72-78
13	Superfícies de Riemann	80-85
	Solução dos Exercícios	86-final

Números Imaginários são Reais

Parte 1: Introdução

Vamos examinar a função:

$$f(x) = x^2 + 1. \qquad (1)$$

Se representarmos graficamente nossa função, obteremos a parábola amigável da Figura 1. Agora digamos que queremos descobrir onde a equação é igual a zero, queremos encontrar as raízes. Em nosso gráfico deve ser onde a função cruza o eixo x.

Como podemos ver, nossa parábola nunca cruza o eixo x, portanto, de acordo com nosso gráfico, não há soluções para a equação $x^2+1 = 0$.

Mas há um pequeno problema. Há pouco mais de 200 anos, um cara esperto chamado Gauss provou[1] que toda equação polinomial de grau n possui n raízes. Nosso polinômio tem o maior expoente igual a dois, então devemos ter duas raízes. A descoberta de Gauss não é só uma regra aleatória, hoje a chamamos de O Teorema Fundamental da Álgebra.

Parece que nosso gráfico discorda com algo tão importante que é chamado de O Teorema Fundamental da Álgebra, o que pode ser um problema. O que Gauss está nos dizendo aqui é que existem dois valores perfeitamente bons de x que poderíamos colocar na nossa função e obter o valor zero. Onde estas duas raízes poderiam estar?

A resposta curta é que não temos números o suficiente. Normalmente pensamos nos números que existem no contínuo dimensional, a reta numérica. Todos os nossos amigos estão aqui: o zero, o um, os números negativos, as frações, até mesmo os números irracionais como $\sqrt{2}$ aparecem.

Mas este sistema está incompleto. E nossos números sumidos não estão apenas mais à direita ou à esquerda, eles vivem em uma dimensão totalmente nova. Algebricamente,

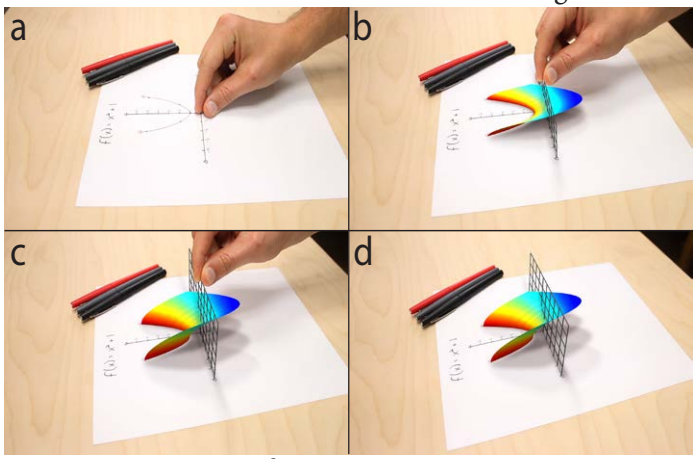


Figura 2 | Gráfico de $f(x) = x^2+1$ onde x inclui números imaginários. As imagens a-d me mostram "puxando" a função da página.

1 A prova completa demorou um pouco mais.

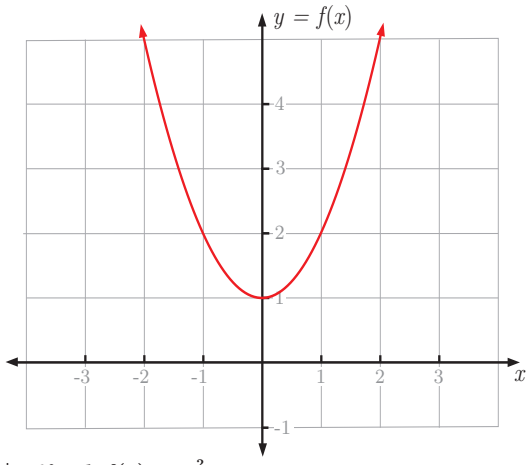


Figura 1 | Gráfico de $f(x) = x^2+1$.

essa nova dimensão tem tudo a ver com um problema que era matematicamente considerado impossível por mais de dois mil anos: a raiz quadrada de menos um.[2]

Quando incluimos essa dimensão ausente em nossa análise, nossa parábola acaba se parecendo mais com a Figura 2, e não preciso dizer que é bem mais interessante.

Agora que nossos números de entrada estão em sua forma completa bi-dimensional, vemos como nossa função x^2+1 realmente se comporta. E podemos ver que nossa função realmente cruza o eixo x![3] Estávamos apenas olhando na dimensão errada.

Então, por que é que esta dimensão extra que os números possuem não é de conhecimento comum? Parte do motivo é que recebeu um nome muito terrível. Um nome que sugere que esses números nem são reais!

De fato, o próprio Gauss escreveu sobre isso:

"Que esse assunto [os números imaginários] foi até agora cercado por uma obscuridade misteriosa, deve-se atribuir em grande parte a uma notação mal adaptada. Se, por exemplo +1, -1 e a raiz quadrada de -1 tivessem sido chamados de unidade direta, inversa e lateral, ao invés de positivo, negativo e imaginário (ou mesmo impossível), essas obscuridades estariam fora de cogitação."

- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Então sim, esta dimensão que falta é composta de números que receberam o nome ridículo de imaginários. Gauss propôs que esses números fossem chamados de

2 Mais sobre isto depois

3 Se você está prestando atenção, você deve estar pensando "caralho Stephen, você dissee que o gráfico deveria cruzar o eixo duas vezes (haveriam duas soluções), e o gráfico na figura 2 cruza quase um milhão de vezes!" Ótimo ponto Greg! O motivo disso é que a gente só colocou no gráfico a parte real do gráfico para manter as coisas mais simples, vamos cobrir a solução completa (que, de fato, tem 2 respostas) na Parte 13. Anime-se!

laterais[1], então de agora em diante, vamos chamá-los de laterais ao invés de imaginários.

Para entender melhor os números laterais/imaginários e realmente entender o que está acontecendo na Figura 2, vamos dedicar um pouco de tempo pensando sobre os números.

Os primeiros seres humanos realmente só tinham uso para os números naturais (1, 2, 3...). Isto faz sentido por causa de como os números eram utilizados, como uma ferramenta para contar coisas. Então para os primeiros humanos, a reta numérica teria sido apenas uma série de pontos.

À medida que as civilizações avançaram, as pessoas precisavam de respostas para questões matemáticas mais sofisticadas, como quando plantar sementes, como dividir a terra e como acompanhar transações financeiras. Os números naturais não eram mais suficientes, então os egípcios inovaram e desenvolveram uma solução de alta tecnologia: as frações.

1 Explicaremos *por que* Gauss preferiu o nome imaginário na parte seis.

Figura 3 | De agora em diante, lateral = imaginário. Gauss preferia o termo lateral do que imaginário, veremos exatamente o porquê na Parte 6.

As frações preencheram as lacunas em nossa reta numérica, e foram basicamente a tecnologia de ponta por alguns milhares de anos.

As próximas grandes inovações a chegar à reta numérica foram o número zero e os números negativos, mas levou algum tempo[2] para que todos estivessem abordo. Visto que não é óbvio[3] o que são estes números ou como eles se encaixam no mundo real, o zero e os números negativos foram recebidos com ceticismo e

2 Muito tempo mesmo. Milhares de anos
3 Lembra da terceira série?

Civilização	Época	Exemplo dos Numerais	Frações	Zero como Espaço Reservado	Zero	Negativos	Números Imaginários	Reta Numérica
Pré-história	<3000 aC		✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3
Antigo Egito	1740aC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Babilônia	300aC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Olmecas	700-400aC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Grécia	500aC-100dC		✓	✗	✗	✗	✗	1 2 3
China	200aC-200dC		✓	✓	✗	✓	✗	-3 -2 -1 1 2 3
Romanos	27 aC-476dC		✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3
Camboja	700dC		✓	✓	✓	✗	✗	1 2 3
Índia + Pérsia	600-1000dC		✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Europa Medieval	500-1400dC		✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3
Europa Renascentista	1300-1700dC	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Era Moderna	>1700 dC	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✓	i -1 1 -i

Tabela 1 | Uma breve visão geral da história dos números. Levo um bom tempo para os números modernos se tornarem realidade. Somente nos últimos cem anos vemos os números imaginários/laterais realmente aceitos. As datas aqui são aproximadas, lembre-se que a maioria destas civilizações não tinha realmente retas numéricas. O objetivo aqui é visualizar como os números se desenvolveram ao longo do tempo. Por fim, observe a diferença entre o zero e o zero como um espaço reservado. Em um sistema numérico posicional como o nosso, o local de um dígito carrega significado. O três em 23 significa 3 unidades, enquanto que o três em 32 significa 3 dezenas, ou trinta. temos um problema se tivermos que diferenciar 30 e 300, e não tivermos um zero! Este é o zero como espaço reservado, não é um conceito sozinho, mas uma ferramenta notacional.

amplamente evitados e ignorados. Algumas culturas suspeitavam mais que outras, dependendo em grande parte em como as pessoas viam a conexão entre a matemática e a realidade. Um grande exemplo é a civilização Grega, apesar de terem feito grandes avanços na geometria, os gregos geralmente não aceitavam números negativos ou zeros, afinal como que o nada poderia ser alguma coisa?

O que é pior é que nem tudo isso é história antiga, apenas alguns séculos atrás, os matemáticos intencionalmente mudavam os termos para evitar que números negativos aparecessem nas equações. A suspeita sobre o zero e os números negativos acabou enfraquecendo, parcialmente porque os negativos são uteis para expressar conceitos como dívida, mas principalmente porque os negativos continuavam se infiltrando na matemática.

Acontece que há muita matemática que você não pode fazer se não permitir que os números negativos ocorram. Sem os negativos, problemas de álgebra simples como $x + 3 = 2$ não tem resposta. Antes dos negativos serem aceitos, este problema não tinha solução, assim como pensamos que a Equação 1 não tinha solução.

O problema é, não é louco ou estranho pensar que problemas como este não tem solução, para resolver $x + 3 = 2$, subtraímos 3 dos dois lados, resultando em $x = 2 - 3$. Em palavras, este problema de álgebra está dizendo basicamente: "se eu tenho 2 coisas e eu tiro 3, quantas coisas me sobram?"

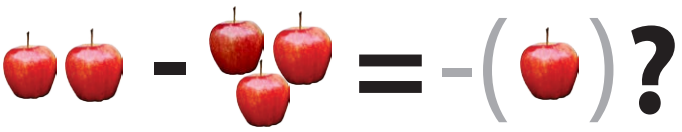


Figura 4 | Números negativos nem sempre fazem sentido. Duas maçãs, tirando três maçãs é igual a... anti-maçã?

Não é de surpreender que a maioria das pessoas tenha vivido em nosso planeta sem suspeitar de questões como estas. Estes problemas não fazem nenhum sentido. Até mesmo matemáticos brilhantes do século XVIII, tais como Leonard Euler, não entenderam completamente o que fazer com os negativos, ele escreveu em algum ponto que os negativos eram maiores que o infinito.[1]

Portanto, é justo dizer que os números negativos e imaginários levantam muitas questões muito boas e válidas, tais como:

- Por que exigimos que os estudantes entendam e trabalhem com números que iludiram as maiores mentes matemáticas por milhares de anos?
- Por que chegamos a aceitar os números negativos e imaginários em primeiro lugar, quando eles nem parecem estar conectados com algo no mundo real?
- Como que estes números a mais ajudam a explicar as soluções que estão faltando na Equação 1?

Da próxima vez, vamos começar a abordar estas questões voltando à descoberta dos números complexos.

1 Esquisito.

Exercícios 1

Discussão

1.1 Por que você acha que a maioria das pessoas que viveram em nosso planeta não desconfiaram dos números negativos?

1.2 Por que você acha que os números negativos são tão bem aceitos hoje, embora sejam de alguma forma esquisitos?

1.3 Você acha que os números negativos devam ser ensinados para alunos do ensino fundamental? Por que?

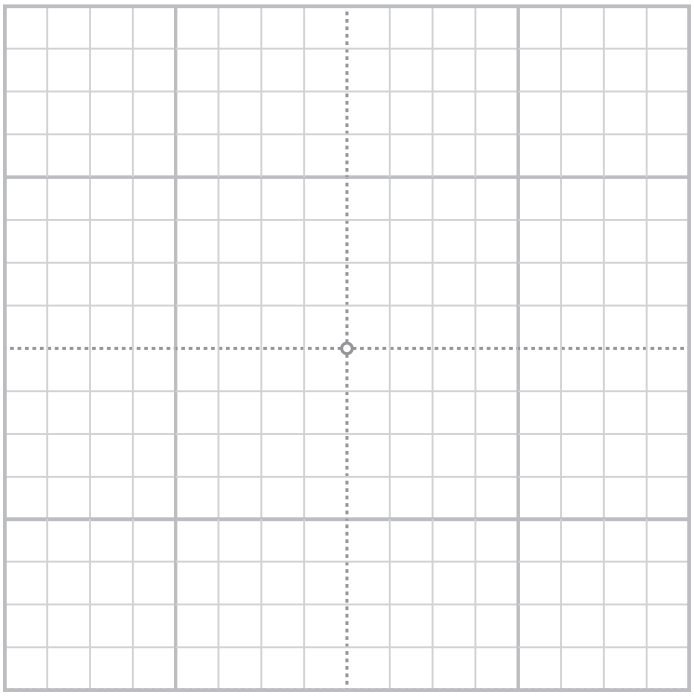
1.4 Como você explicaria os números negativos para um aluno do 6º ano?

1.5 Quais civilizações históricas você acha que abraçaram mais a matemática? Quais não?

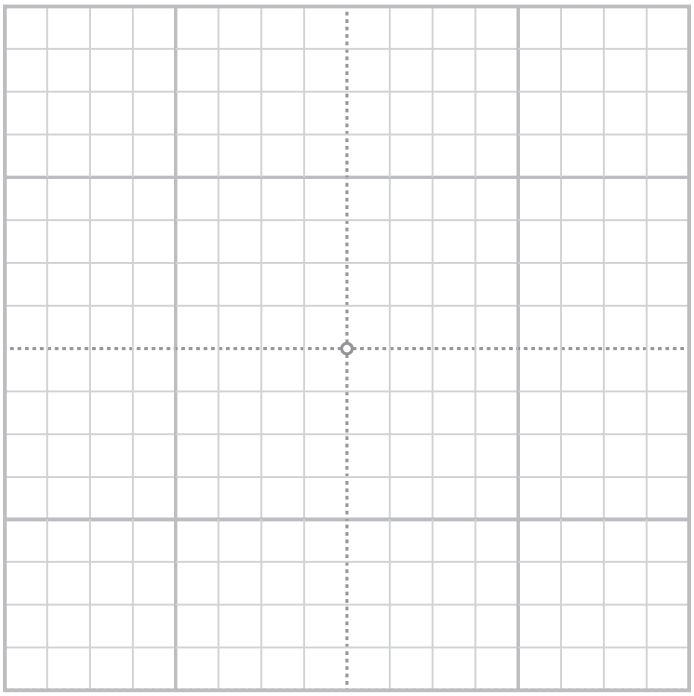
Broca

Faça o gráfico de cada função.

1.6 $f(x) = x^2\text{-}4x+4$



1.7 $g(x) = -x^2+x+6$

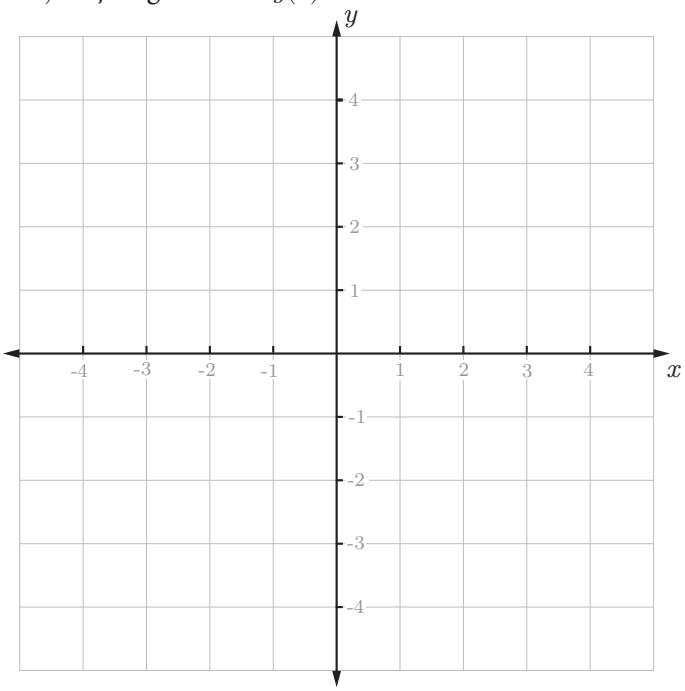


Pensamento Crítico

1.8 Considere a irmã mais bem comportada da Equação 1:

$$g(x) = x^2\text{-}1$$

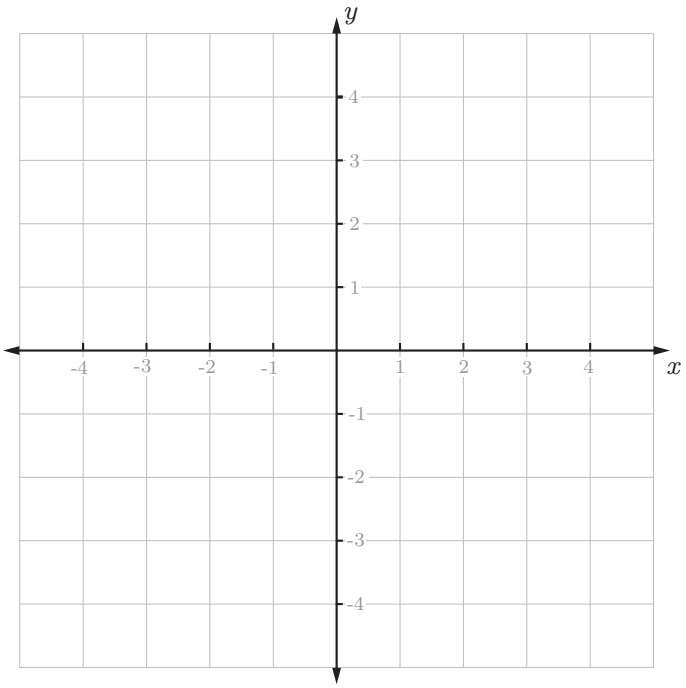
a) Faça o gráfico de $g(x)$.



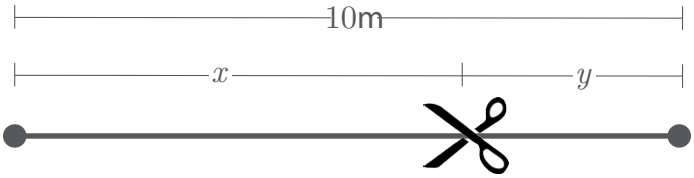
b) Para quais valores de x $g(x)=0$? $g(x)=0$ quando $x=$_____ ou $x=$_____. Estes são chamados de **raízes, zeros ou intersecção com x de *g*.**

c) As raízes de g são muito mais fáceis de encontrar do que as raízes de f (Equação 1), por que?

1.9 Até agora vimos uma função com 2 raízes, g, e uma função com nenhuma raiz óbvia, f (Equação 1). Encontre e faça o gráfico de uma função do 2º grau (quadrática) com uma raiz óbvia. Chame-a de $h(x)$.



1.10 Você cortou x metros de uma corda de 10 metros, deixando y metros para o pedaço de corda restante.



a) Escreva uma equação relacionando x e y.

b) Resolva para y quando x=7m, x=10m e x=13m.

c) Uma de suas respostas à parte b deve ser negativa. O que uma resposta negativa lhe diz sobre o restante da corda? O valor dado na resposta importa, ou saber que sua resposta é negativa é o suficiente para chegar a uma conclusão sobre a corda restante?

1.11 Você tem exatamente 10 minutos para chegar na sala de aula para seu exame final sobre números laterais! Seu amigo Gus (que estranhamente gosta deste tipo de coisa) disse que sua sala de aula está exatamente a 10.000 metros de distância. Digamos que você viaje até lá a uma taxa de r metros/minuto. Você gostaria de chegar lá alguns minutos mais cedo. Mais especificamente, digamos que você chegue t minutos mais cedo.

a) Escreva uma equação que relacione r e t.

b) Calcule t para r=1250 metros/minuto, r=1000 metros/minuto e r=625 metros/minuto.

c) Uma de suas respostas da parte b deve ser negativa. Este resultado é significativo? O que uma resposta negativa lhe diz sobre quando você vai chegar na sala de aula?

Desafio

1.12 Considere a função:

$$p(x) = x^4\text{-}10x^3+35x^2\text{-}50x+24$$

a) De acordo com o teorema fundamental da álgebra, quantas raízes $p(x)$ tem?

b) Encontre todas as raízes de $p(x)$. Você pode utilizar a tecnologia se quiser, mas não é necessário concluir o problema.

Números Imaginários são Reais

Parte 2: Um Pouco de História

Da última vez, nós estávamos nos perguntando como que os números imaginários/laterais poderiam nos ajudar a encontrar as raízes da nossa equação x^2+1 e, além disso, como que os números imaginários e negativos se tornaram parte da matemática moderna após terem sido evitados e ignorados por milhares de anos, pois, sejamos honestos aqui, eles realmente não fazem muito sentido.[1]

Mas algo aconteceu na Europa cerca de cinco séculos atrás que não permitiria mais que os matemáticos ignorassem estes números. Um matemático italiano, Scipione del Ferro, estava tentando resolver um problema que não é muito diferente do nosso.

Em algum ponto você já deve ter visto a fórmula de "Bháskara". Esta fórmula é super útil porque ela nos dá as raízes[2] de qualquer equação do 2º grau, tudo que você deve fazer é substituir os valores de a, b e c, e ela dá a resposta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad (2)$$

onde:

$$0 = ax^2 + bx + c.$$

Del Ferro estava tentando encontrar uma fórmula como esta para equações do 3º grau, as cúbicas. O caso geral é bem difícil:

$$0 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

então Del Ferro primeiro considerou o caso onde o termo x^2 não está, e o último termo é negativo:

$$0 = ax^3 + cx - d.$$

No século XVI, os termos negativos eram muito esquisitos de se escrever, então del Ferro escreveu sua cúbica como:

$$x^3 + cx = d, \qquad (3)$$

e exigiu que c e d fossem positivos.[5]

Agora que temos nossa equação definida, o jogo aqui é isolar o x em um dos lados e todas as constantes[6] do outro lado. Isto é muito fácil em equações lineares[7], podemos simplesmente somar, multiplicar, dividir ou subtrair até isolar o x.

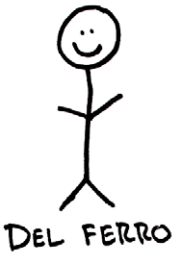


Figura 5 | Profissional das artes muito bem pago representando Scipione del Ferro. 1465-1562.

As quadráticas são um pouco mais difíceis, você deve ter aprendido isso na escola, é preciso de mais habilidade, e fatoração para completar o quadrado.

Del Ferro estava tentando fazer o mesmo para sua equação cúbica, e através de uma substituição muito esperta, ele eventualmente encontrou uma solução:[8]

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}}. \qquad (4)$$

Assim como a fórmula de "Bháskara", a nova fórmula de del Ferro o permitiu encontrar a solução para equações cúbicas ao substituir valores. A tabela 2 mostra o resumo destes tipos de equações polinomiais e suas soluções.

Agora, por algum motivo, a forma que os matemáticos ganhavam dinheiro no século XVI era desafiando outros matemáticos ao que eram basicamente "duelos matemáticos", por isso del Ferro manteve sua fórmula em segredo para usar em seu próximo duelo.

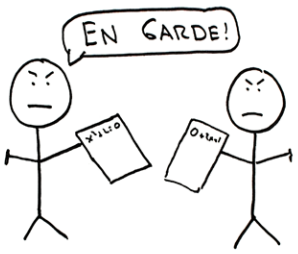


Figura 6 | Super duelo matemático. Porque obivamente é para isso que serve a matemática. Duelar.

O que acontece em seguir é uma longa história, aqui está um resumo. Del Ferro manteve sua fórmula em segredo até seu leito de morte, quando ele *finalmente* contou para seu aluno

1 Números imaginários: "Hey, vamos ter um encontro próxima semana, esperamos que vocês venham!" Matemáticos: "ehhh, estamos meio ocupados fazendo matemática de *verdade*."

2 Ou seja, soluções, zeros. Digamos que ela lhe diga como achar o x!

3 Quadrática, por isso o nome...

4 Tornando a equação mais fácil de se resolver, este é chamado de uma "cúbica deprimida"

5 Perceba que perdemos o *"a"* aqui também. Podemos fazer isso dividindo por a, e chamando o "novo" c ser c/a e o "novo" d ser d/a. Afinal, eles são apenas constantes!

6 constantes = a, b, c

7 de 1º grau, isto é mostrado em mais detalhes na Tabela 2.

8 Se você acha que del Ferro não era esperto, tente resolver a equação de 3º grau sozinho. Uma derivação completa está disponível em: welchlabs.com/blog.

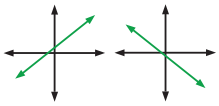
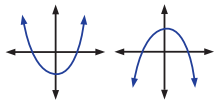
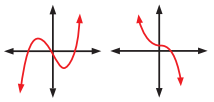
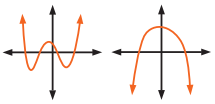
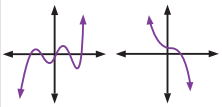
Tipo da Equação	Maior Grau	Forma Geral	Como é o Gráfico	Solução Geral	Solução Descoberta
Linear	1	$ax + b = 0$		$x = \frac{-b}{a}$	Muito tempo atrás
Quadrática	2	$ax^2 + bx + c = 0$		$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	~2000 aC
Cúbica	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $x^3 = cx + d$ *		$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}}$	Início de 1500
Quártica	4	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$			1540 dC
Quíntica	5	$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$		Comprovado não existir em 1824!	

Tabela 2 | Polinômios e soluções. *Para funções cúbicas, a solução geral mostrada é o caso simplificado. Note que conforme aumentamos o grau, os polinômios ficam significativamente mais difíceis de se resolver! O caso quártico fica bem ridículo, apenas uma das 4 soluções da equação quártica é msotrada aqui, como você pode ver, quase não cabe.

Figura 7 | Niccolò Fontana Tartaglia. 1500-1557. Se você acha que seu apelido é uma merda, não é, esse cara teve sua mandíbula cortada por um soldado quando criança levando a uma gagueira pelo resto de sua vida, e foi chamado de "gaguejador" (Tartaglia) – mesmo nas equações que ele ajudou a desenvolver.

Antonio Fior. Fior imediatamente pensou que era invencível, pelo menos em um duelo matemático,[1] e desafiou um matemático muito mais habilidoso, Fontana Tartaglia, a um duelo. Tartaglia tinha resolvido com sucesso cúbicas semelhantes, mas até agora não tinha conseguido resovler as cúbicas da forma de del Ferro. Suspeitando que Fio seria capaz de resolver estes problemas mais difíceis, Tartaglia enlouqueceu antes do duelo e descobriu como resolver a equação no último minuto, e passou a dominar completamente Fior.[2]

Tartaglia então passou a compartilhar a fórmula com o mundo! Na verdade, ele a manteve como um super segredo apra que ele pudesse continuar chutando os traseiros nos duelos matemáticos.[3] Isto é, até um matemático talentoso chamado Girolamo Cardano ouviu sobre a fórmula e pressionou Tartaglia a compartilhar. Ele eventualmente cedeu, mas apenas depois que Cardano jurou segredo. Felizmente para nós, depois que Cardano se deparou com o trabalho do descobridor original, del Ferro,[4] ele percebeu que não era bem um segredo e publicou a fórmula em seu livro Ars Magna. [5]

Cardano continuou aprimorando a fórmula emprestada, fazendo com que ela funcionasse para cúbicas que incluíssem o termo x^2.[6] Entretanto, ao longo do caminho, Cardano encontrou um problema. Em uma versão um pouco diferente da equação escrita como $x^3 = cx + d$, para certos valores de c e d[7], a fórmula quebrava.

Vamos dar uma pequena olhada:[8]

$$x^3 = 15x + 4, \qquad (5)$$

quando inserimos a fórmula de Cardano obtemos um resultado que envolve a raiz quadrada de números negativos...[9]

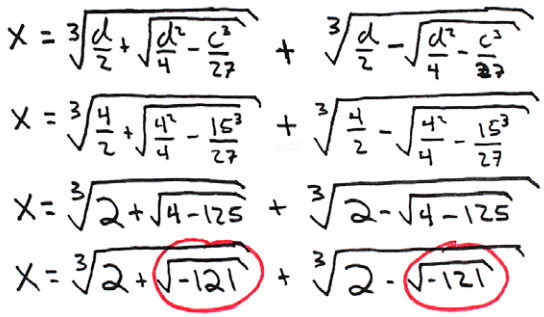


Figura 8 | Usando a fórmula de Cardano. Quando tentamos usar a fórmula de Cardano para avaliar a cúbica simples da Equação 5, encontramos um pequeno problema.

1 Não bem invencível

2 Este parágrafo é um pouco diferente do vídeo, onde eu entendi errado este detalhe. Eu disse que Tartaglia alegou falsamente que era capaz de resolver estes problemas, a história correta acima é o que realmente aconteceu.

3 Mwhahahaha

4 Lembra dele? ...da...última página...

5 Ars Magna = A Grande Arte (referindo-se à álgebra, em vez da aritmética menor). Fontana não estava tão feliz com Cardano compartilhando sua fórmula e o acusando de plágio e coisas do tipo. O drama se seguiu.

6 Cardano fez isso por uma substituição muito esperta. Dada $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, substitua $x = x\text{-}b/3$.

7 $d^2/4\text{-}c^3/27 < 0$

8 Cardano usou este exemplo em Ars Magna.

9 Note que estamos usando a versão modificada de Cardano (veja Tabela 2).

As raízes quadradas de números negativos criavam problemas suficientes que impediam Cardano de seguir em frente. Raízes quadradas nos pedem para encontrar um número, que quando multiplicado por ele mesmo, dá o número dentro do sinal da raiz. A raiz quadrada de nove é três porque três vezes três é nove. É importante ressaltar que a raiz quadrada de nove também é menos três, pois menos três vezes menos três também é mais nove.

$$\sqrt{9} = 3, -3$$

Mas e as raízes de números negativos? Qual é a raiz quadrada de menos nove? Mais três não funciona e nem menos três, estamos emperrados.

$$\sqrt{-9} = ?$$

Cardano também estava emperrado, ele não conhecia nenhum número que quando multiplicado por ele mesmo resulta em um número negativo.[1]

Agora esta certamente não era a primeira vez que a raiz quadrada de um número negativo tinha aparecido, normalmente os matemáticos interpretavam isto como a forma do problema dizer que não há soluções, e em muitos casos isto é verdade.[2] Todavia, neste caso nós *sabemos* que há pelo menos uma solução, devido a forma que as cúbicas são desenhadas.[3]

Independentemente de seus coeficientes, as funções cúbicas sempre cruzarão o eixo x pelo menos uma vez, o que significa que nossa equação $x^3 = 15x + 4$ terá pelo menos uma solução real.

Então, o que temos aqui é um problema que deve ter uma resposta, uma fórmula que foi comprovada que funciona. Mas quando reunimos essas informações, e tentamos resolver o problema com nossa fórmula, rapidamente chegamos ao que parece impossível, as raízes quadradas dos números negativos.

Às vezes, quando as coisas quebram na matemática e na ciência, isso só significa que elas estão quebradas, mas há outras situações mais interessantes nas quais a matemática quebrada nos dá as chaves para desbloquear novos insights. A maneira como a fórmula de Cardano foi quebrada se mostrou incrivelmente importante para a matemática e as ciências, e é isso que começaremos a discutir da próxima vez.

---

da equação original de del Ferro. A modificação de Cardano nos permitiu resolver casos envolvendo valores negativos da constante *c* de del Ferro.

1 Ele na verdade sabia sobre estas, mas não sabia como aplicá-las aqui. Veja o exercício 3.17.

2 Veja Exercícios 2.11 e 2.14

3 De fato, uma solução da Equação 5 é o 4. Cheque a Figura 13 para um exemplo de como as cúbicas são desenhadas.

Exercícios 2

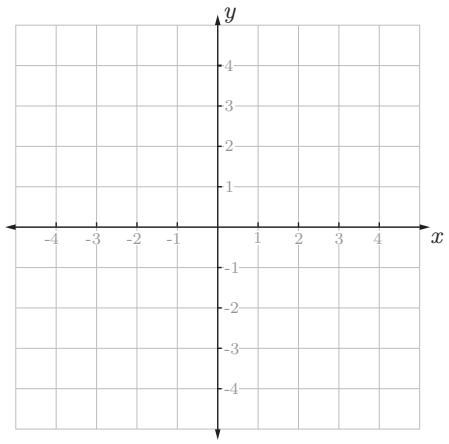
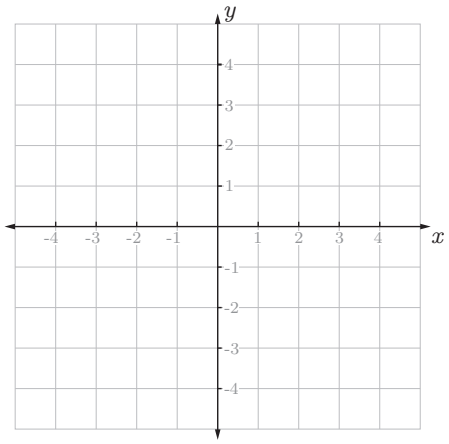
Discussão

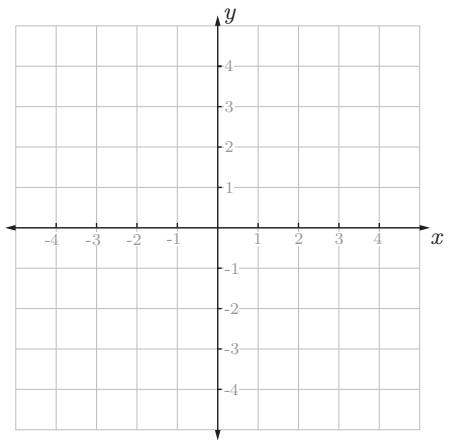
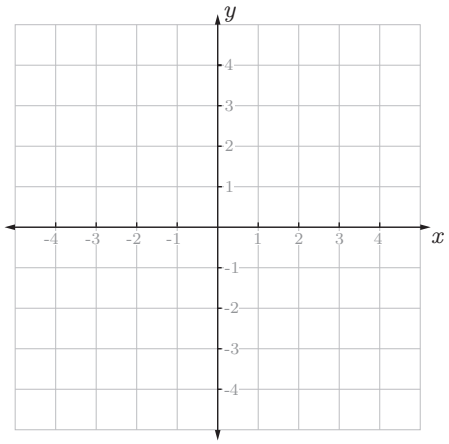
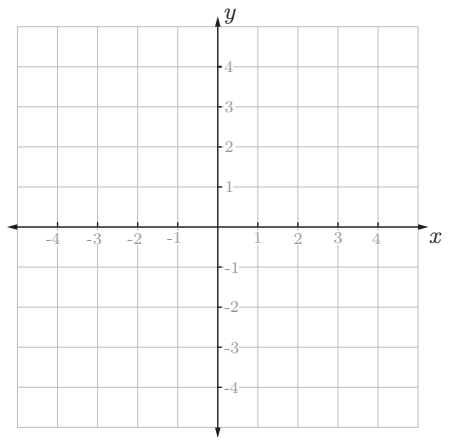
2.1 Por que del Ferro manteve sua descoberta em segredo?

2.2 Por que problemas como $\sqrt{-16}$ são estranhos?

2.3 Por que você acha que os duelos matemáticos são bem menos populares hoje em dia do que no século XVI?

Broca

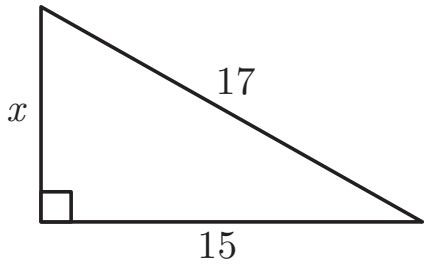
	Faça o gráfico	Resolva por Fatoração (Se Possível)	Resolva pela Fórmula de "Bháskara"` (Se Possível)
2.4	$f(x) = x^2 - x - 2$ x | y -2 -1 0 1 2 3 	$0 = x^2 - x - 2$	$0 = x^2 - x - 2$
2.5	$g(x) = x^2 + 3x + 2$ x | y -3 -2 -1 0 1 	$0 = x^2 + 3x + 2$	$0 = x^2 + 3x + 2$

	Faça o gráfico	Resolva por Fatoração (Se Possível)	Resolva pela Fórmula de "Bháskara"` (Se Possível)
2.6	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ x | y -1 0 1 2 3 	$0 = x^2 - 2x + 1$	$0 = x^2 - 2x + 1$
2.7	$g(x) = x^2 + x - 4$ x | y -3 -2 -1 0 1 2 	$0 = x^2 + x - 4$	$0 = x^2 + x - 4$
2.8	$h(x) = x^2 + 1$ x | y -2 -1 0 1 2 	$0 = x^2 + 1$	$0 = x^2 + 1$

Pensamento Crítico

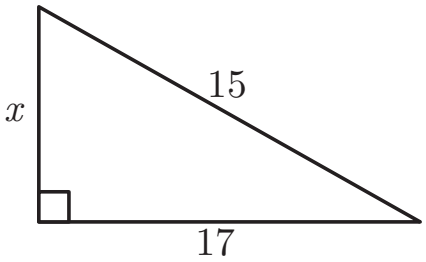
2.9 Por que a fórmula de "Bháskara" é útil? Ela lhe permite resolver quaisquer tipos de problemas que você não poderia de outra forma? (Dica: compare os exercícios 2.7 com os de 2.4 a 2.6)

2.10 Calcule o valor de x:



2.11 Às vezes, problemas como o 2.10 são menos diretos.

a) Calcule o valor de x:



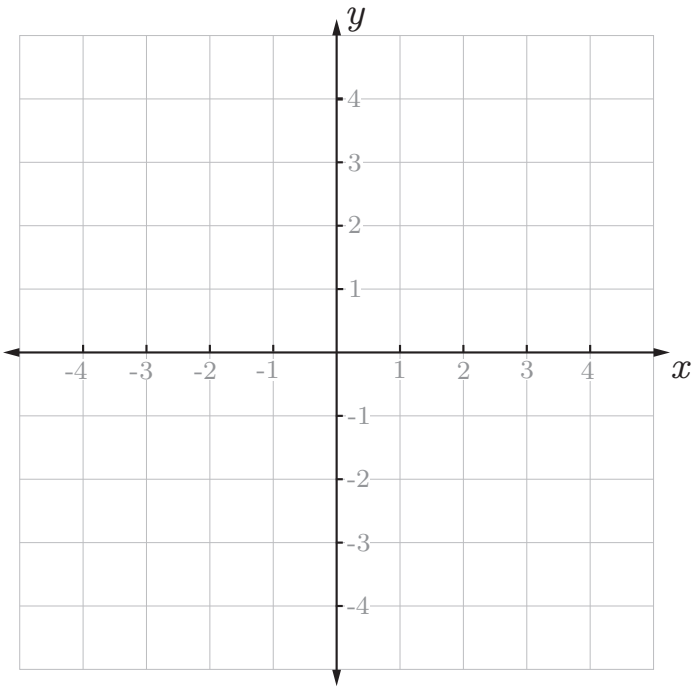
b) Como foi o item a? :) Se você usou o Teorema de Pitágoras para calcular o valor de x, o resultado deve ter sido a raiz de um número negativo. Estranho. O que está acontecendo aqui?

2.12 Onde a parábola $y = x^2$-4 e a reta y $= 2x$-1 se cruzam?

2.13 Onde a parábola $y = x^2$-4 e a reta y $= 2x$-3 se cruzam?

2.14 a) Onde a parábola $y = x^2$-1 e a reta y $= 2x$-3 se cruzam?

b) Usando a fórmula de "Bháskara" para resolver o item a deve ter resultado na raiz quadrada de um número negativo. O que isto exprime sobre o problema? Faça o gráfico da parábola e da reta do item *a* abaixo.



2.15 Resolva a equação $x^3 = 8$ usando a fórmula de del Ferro (Equação 4).

2.16 Resolva a equação $x^3 + 6x = 20$ usando a fórmula de del Ferro (Equação 4).

2.17 Resolva a equação $x^3 = x + 2$ usando a fórmula da versão modificada de del Ferro por Cardano (mostrada na terceira coluna da Tabela 2).

Desafio

2.18 Deduza a Fórmula de "Bháskara" de $\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}=0$ completando o quadrado.

2.19 Deduza a Fórmula de del Ferro $x^3+\mathrm{c}x=\mathrm{d}$ usando bruxaria.

2.20 O que exatamente os valores de *c* e *d* resultam nas raízes quadradas de números negativos na fórmula de Cardano (linha 3 da coluna 5 da Tabela 2)? Quantas soluções reais exatamente existem neste tipo de cúbica?

Números Imaginários são Reais

Parte 3: O Problema de Cardano

Paramos da última vez com Cardano e sua fórmula quebrada para encontrar as raízes das funções cúbicas. Cardano sabia que seu problema tinha que ter uma solução, mas não sabia o que fazer com as raízes quadradas de números negativos que continuavam aparecendo em suas equações.

Cardano chegou perto de encontrar uma maneira de fazer sua fórmula funcionar, mas ficou preso em um loop algébrico, onde um monte de trabalho o levaria de volta para onde ele começou.

Foi necessário mais uma geração de matemáticos para chegar ao fundo disso. O aluno de Cardano, Rafael Bombelli, teve algumas ideias incríveis sobre o que realmente estava acontecendo aqui.

Vamos lembrar por que o Cardano estava emperrado, as raízes quadradas dos números negativos nos pedem para encontrar um número que, quando multiplicado por ele, gera um valor negativo. Nem números positivos nem negativos funcionarão.

O primeiro grande insight[1] de Bombelli foi simplesmente aceitar que, se nem os números positivos nem os números negativos funcionarem, então talvez exista algum outro tipo de número por aí que funcione. Agora, se houver algum outro tipo de número, uma boa pergunta é: como vamos chamá-lo? Afinal, precisamos usá-lo em nossas equações.

A abordagem de Bombelli foi muito prática.[2] Em vez de sonhar com um novo nome e símbolo[3], Bombelli simplificou que a raiz quadrada dos negativos fosse algo deles. No passado, os matemáticos teriam jogado a toalha aqui e declarado o problema "impossível", mas Bombelli foi capaz de continuar simplesmente permitindo que a raiz quadrada dos negativos existisse.

Vamos dar um exemplo simples de nossos novos números, a raiz quadrada de menos um. Agora, por ser um novo tipo de número, não parece muito emocionante e

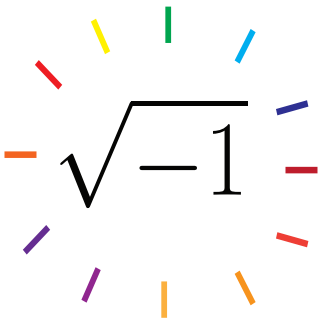


Figura 10 | A Raiz Quadrada de Menos Um. Aqui está o nosso mais novo número que precisamos para resolver nossos problemas. Não parece muito, e é por isso que nosso artista adicionou essas linhas coloridas e dramáticas.

1 que não era totalmente novo - Cardano sabia disso
2 Embora, não tão imaginário.
3 Veja o grande número misterioso kweuasdktst cujo símbolo é ᾤΩΐΑ• • • e seu nome não deve ser dito!

Figura 9 | Rafael Bombelli. 1526-1572. Rafael era aparentemente muito bom em drenas os pântanos, o que é legal... eu acho.

e parece que são nossos números antigos. Mas lembre-se, ele tem a propriedade especial exata de que precisamos, quando elevamos ao quadrado, o resultado é negativo. Além disso, como esse número não é negativo nem positivo, deve ser algo novo.

$$(\sqrt{-1})^2 = -1 \qquad (6)$$

Agora, se tudo isso lhe parece um pouco suspeito, como um truque de álgebra um pouco conveniente demais, você está em boa companhia.[4]

De fato, é difícil introduzir números imaginários[5] sem que soem como uma invenção arbitrária. No entanto, antes de descartarmos a raiz quadrada de menos um como uma abstração inventada para torturar estudantes, vamos revisar o que aprendemos até agora.

Cardano e Bombelli estavam genuinamente emperrados com um problema difícil que eles sabiam ter uma solução. O que Bombelli conseguiu ver é que, se ele estendesse o sistema numérico existente, como já havia sido feito tantas vezes antes,[6] ele poderia resolver o problema.[7] Assim como as pessoas precisaram de frações, do zero e dos números negativos para resolver novos problemas no passado; para resolver esse problema, Bombelli agora precisava que a raiz quadrada de menos um fosse o seu próprio número novinho em folha.

Vamos ter certeza de que estamos claros sobre o que significa a raiz quadrada de menos um ser seu próprio número. Se nosso novo número é realmente uma descoberta e não uma invenção, ele deve se comportar como os outros números que já conhecemos, deve seguir as regras estabelecidas de álgebra e da aritmética. E acontece que a raiz quadrada de menos um segue, na maior parte.

4 Cardano and Bombelli se sentiram da mesma maneira!
5 Laterais
6 De números inteiros a frações ao zero aos negativos.
7 Lembre-se de que estender o sistema numérico antes nos permitiu resolver problemas que, de outra forma, não conseguiríamos, como x+3=1.
8 Como √2 · √3 = √6, mas cuidado, √-1 · √-1 não é igual a 1! (nem todas as regras se aplicam a números imaginários).

Assim como podemos separar a raiz do produto de 2 números positivos,[8] também podemos separar nossas raízes quadradas de negativos. A raiz quadrada de menos 25 se divide na raiz quadrada de 25 vezes a raiz quadrada de menos um.

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} \tag{7}$$

Esse processo é importante porque nos permite expressar a raiz de qualquer negativo usando a raiz quadrada de menos um. A raiz quadrada de menos 25 torna-se 5 vezes a raiz quadrada de menos um.

$$\begin{aligned} \sqrt{-25} &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 5\sqrt{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Podemos usar esse processo para expandir a raiz de qualquer número negativo e escrevê-lo como um número que já conhecemos, multiplicado pela raiz quadrada de menos um.

$$\begin{aligned} \sqrt{-16} &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 4\sqrt{-1} \\ \sqrt{-17} &= \sqrt{17} \cdot \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{17}\sqrt{-1} \\ \sqrt{-18} &= \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 3\sqrt{2}\sqrt{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

Vamos garantir rapidamente que nossos novos números sigam as mesmas regras que outros números. Nos problemas de álgebra com x, apenas termos semelhantes podem ser somados ou subtraídos. 2x+3x é 5x, mas 2+3x é apenas 2+3x.[1] Da mesma forma, 2√-1+3√-1=5√-1, mas 2 + 3√-1 é apenas 2 + 3√-1. Finalmente, termos diferentes podem ser multiplicados assim como na álgebra com o x: 5 vezes x é apenas 5x, e 5 vezes √-1 é apenas 5√-1.

Agora, existem alguns casos em que nossos novos números se comportam de maneira um pouco estranha, mas esses podem ser evitados separando primeiro a raiz quadrada de menos um. A tabela 3 mostra alguns exemplos.

Agora que temos uma ideia de como nossos novos números funcionam, podemos ver como eles resolvem um dos nossos problemas. Agora temos uma estratégia para lidar com as raízes dos negativos. Podemos calcular a raiz quadrada de menos 9 em que estávamos presos e obter 3 vezes √-1.

1 Pois 2 e $3x$ não são termos semelhantes.

$$\begin{aligned} \sqrt{-9} &= \sqrt{9 \cdot -1} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} \\ &= 3 \cdot \sqrt{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

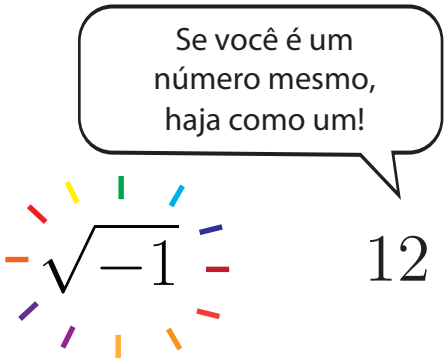


Figura 11 | Suspeita. Aqui vemos doze, um número já estabelecido, interagindo com nosso novo número pela primeira vez. Como podemos ver, não está indo bem.

Tudo isso é importante, mas não é o suficiente para resolver o problema de Cardano, ainda precisamos descobrir como lidar com as raízes cúbicas destes números.[2] Bombelli foi capaz de resolver nosso problema através de uma visão mais poderosa, e é isso que discutiremos da próxima vez.

Álgebra com x	**Álgebra com $\sqrt{-1}$**
$\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$
$2x + 3x = 5x$	$2\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$
$2 + 3x = 2 + 3x$	$2 + 3\sqrt{-1} = 2 + 3\sqrt{-1}$
$5 \cdot x = 5x$	$5 \cdot \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$
$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$	~~$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{-5} \cdot -2 = \sqrt{10}$~~

Tabela 3 | Álgebra com a Raiz Quadrada de Menos Um. A raiz quadrada de menos um se comporta como os números que já conhecemos, na maior parte. A única coisa que não podemos fazer é mostrada abaixo. Em vez disso, devemos reescrever a expressão como :

$$\sqrt{-1}\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}\sqrt{2} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{2} = -1 \cdot \sqrt{10} = -\sqrt{10}$$

2 A fórmula de Cardano na Figura 8 envolve a raiz cúbica da raiz quadrada de negativos!

Exercícios 3

Discussão

3.1 Rafael Bombelli nasceu em 1526. Por milhares de anos antes da época de Bombelli, as pessoas usavam a matemática para resolver todos os tipos de problemas sem a necessidade da $\sqrt{-1}$. O que você acha tão convincente sobre o problema de Cardano que levou Bombelli a considerar o uso de um tipo de número completamente novo para resolvê-lo?

3.2 Imagine que você está trabalhando em um problema de matemática difícil. Na verdade, é tão difícil que ninguém no planeta resolveu ainda. Você trabalha e trabalha e trabalha e não chega a lugar algum. Seu amigo Gus, que está trabalhando no mesmo problema, diz entusiasmado que encontrou uma solução! Ele mostra o trabalho dele e diz que funciona perfeitamente com uma pequena parte. Para resolver o problema, ele permitiu que existisse um tipo totalmente novo de número. Um tipo de número que ninguém usou antes. Como você reagiria a Gus?

Broca

Simplifique o seguinte. Exemplos úteis podem ser encontrados na Tabela 3 e na Equação 9.

3.3 $\sqrt{-16}$

3.4 $\sqrt{-51}$

3.5 $\sqrt{-4}$

3.6 $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$

3.7 $\sqrt{-5} + \sqrt{5}$

3.8 $16 + \sqrt{-16}$

3.9 $\sqrt{-4}\sqrt{4}$

3.10 $\sqrt{-512}$

3.11 $7/\sqrt{-7}$

3.12 $\sqrt{-4}\ \sqrt{-4}$

3.13 $1/\sqrt{-1}$

Pensamento Crítico

3.14 Por que todas as funções cúbicas tem ao menos uma raiz?

3.15 Encontre dois números em que o produto é 15 e a soma é 8.

3.16 Encontre dois números que o produto é 11.187 e a soma é 212.

3.17 a) Encontre dois números que o produto é 40 e a soma é 10.

b) Como foi o item a? Esse problema remonta ao próprio Cardano. Em seu livro Ars Magna, Cardano dá a tarefa de dividir 10 em partes cujo produto é 40 e chama isso de "manifestamente impossível". Você pode ter chegado a uma conclusão semelhante. No entanto, Cardano empurra Ars Magna e dá a solução:

$$5 + \sqrt{-15} \text{ e } 5 - \sqrt{-15}$$

Mostre que esses números somam 10 e o produto é 40.

O interessante é que, embora Cardano tenha dado essa solução, ele não pensou muito nisso, dizendo: "Então, a sutileza aritmética progressiva, cujo fim, como é dito, é refinado por ser inútil".

Desafio

$$q(x) = 6x^4\text{-}5x^3\text{+}20x^2\text{-}20x\text{-}16$$

3.18 Uma solução de *q(x)* é $\sqrt{-4}$. Encontre todas as outras soluções.

Números Imaginários são Reais

Parte 4: A Solução de Bombelli

Na última vez, decidimos que $\sqrt{-1}$ é seu próprio novo tipo de número, esperando que isso nos ajudasse a resolver o problema de Cardano. Fazer isso é útil, mas encontrar uma solução requer mais um insight do nosso amigo Rafael Bombelli.

Bombelli sabia que, devido à forma como as cúbicas são modeladas, como mostra a Figura 13, a Equação 5 tinha que ter uma solução que não envolvesse $\sqrt{-1}$, tinha que ser um número comum positivo ou negativo como ele já vira antes.

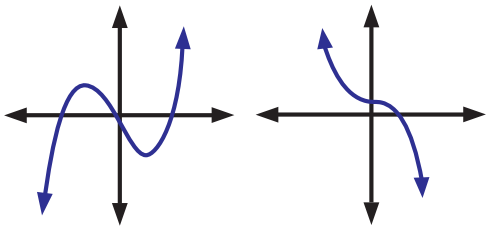


Figura 13 | Algumas Cúbicas. O comportamento final das cúbicas significa que devem ter ao menos um zero real. Mais especificamente, conforme nos movemos à direita ou à esquerda em nosso gráfico e seguimos a curva cúbica, ela deve ir de um lado para cima e do outro para baixo. Tecnicamente: quando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ e quando $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$, ou quando $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$.

Seu segundo maior insight aqui foi que para este ser o caso, as partes da raiz de menos um em cada metade da equação se cancelam quando somadas! [1]

Bombelli usou essa ideia para igualar as duas partes da equação mostrada na Figura 12 $a + b\sqrt{-1}$ e $a - b\sqrt{-1}$ onde a e b são constantes que precisamos encontrar.[2]

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1} \qquad (11)$$

Podemos eliminar primeiro esta maldita raiz cúbica elevando os dois lados da Equação 11 ao cubo. O resultado é um sistema de equações particularmente difícil:

$$2 = a(a^2 - 3b^2)$$
$$11 = b(3a^2 - b^2) \qquad (12)$$

Bombelli foi capaz de contornar isso através de algumas suposições e checagens habilidosas. Se olharmos para a nossa equação original (Equação 5) e testarmos alguns números inteiros[3], verificamos que 4 é uma solução! Se substituirmos 4 em nossas novas equações, podemos calcular a e b e obter $a = 2$ e $b = 1$. Esses valores tornam as duas partes da Equação 11 iguais a $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$

$$x^3 = 15x + 4, \qquad (5)$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}}. \qquad (4)$$

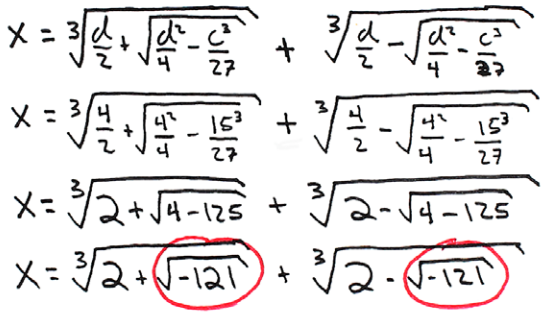


Figura 12 | Lembrete do Problema de Cardano. Quando tentamos usar a fórmula funcional de Cardano (Equação 4) para avaliar a cúbica simples da Equação 5, encontramos um problema.

Podemos elevá-los ao cubo para mostrar que eles são de fato equivalentes aos lados esquerdos da Equação 11 e, mais importante, quando adicionamos as duas partes, como a Equação 4 nos diz para fazer, obtemos apenas 4, que sabemos que é um solução para a nossa equação original.[4] Encontramos a solução para o problema de Cardano![5]

E o que é realmente interessante é que nosso problema não tinha nada a ver com a raiz quadrada de menos um e nem nossa resposta, no entanto, ao longo do caminho, descobrimos que, estendendo nosso sistema numérico para incluir a raiz quadrada de menos um, fomos capazes de encontrar a solução.[6] E acontece que estender o sistema numérico dessa maneira também é útil em muitos outros problemas.[7]

Então, o que Bombelli fez para comemorar depois de descobrir um número crucial para o futuro da ciência e da matemática?

Ele realmente não fez nada. Ele descartou sua descoberta e basicamente disse que era um hack.[9]

Por mais ridículo que pareça agora, Bombelli teve uma conclusão muito razoável para a época. Só pareceu

1 Eles devem ser conjugados complexos!

2 Podemos fazer isso porque $a+b\sqrt{-1}+ a-b\sqrt{-1} = 2a$

3 1...não, 2...não, 3...não

4 As partes com $\sqrt{-1}$ cancelam!

5 Se essa matemática parecer um pouco hacker, não tema, aprenderemos uma abordagem muito mais robusta em breve.

6 "O caminho mais curto entre duas verdades no domínio real passa pelo domínio complexo." -Jacques Hadamard

7 Muitos problemas. Tipo muitos e muitos problemas mesmo. E não apenas problemas de matemática. Problemas de ciência. Problemas de engenharia. Problemas de relacionamento. Ok, não o último, mas o resto é legítimo.

8 RAVE MATEMÁTICA?!?!

9 "O assunto parecia basear-se em sofismas e não na verdade". - Rafael Bombelli. No caso de você não estar a par das suas palavras aleatórias do século XVII, o sofisma é o uso de argumentos falaciosos, especialmente com a intenção de enganar.

muito conveniente, como se fosse um truque feito justamente para resolver problemas como esse.[1]

Elevar números ao quadrado, até aquele momento, estava amplamente associado ao nome da operação, quadrados. A área de um quadrado é igual ao comprimento do seu lado ao quadrado. Áreas tão positivas fazem sentido, mas o que poderia ser uma área negativa? O que seria $\sqrt{-1}$?

Perguntas como essas retardaram o desenvolvimento dos números imaginários. Acontece que *há* um significado muito mais profundo e rico à espreita abaixo da superfície, mas levaria muito tempo após a morte de Bombelli para ser revelado.

Área	Quadrado Associado	Medida do Lado
16	$\square^{4}_{4}$	$\sqrt{16}=4$
9	$\square^{3}_{3}$	$\sqrt{9}= 3$
4	$\square^{2}_{2}$	$\sqrt{4}=2$
1	$\square^{1}_{1}$	$\sqrt{1}=1$
-1	$\square^{?}_{?}$	$\sqrt{-1}=?$

Tabela 4 | Quadrados Estranhos. Historicamente, a operação de elevar ao quadrado estava associada ao que foi chamada, quadrados. Mas como seria um quadrado com uma área negativa?

1 É assim que muitos estudantes parecem se sentir quando conhecem $\sqrt{-1}$, e é uma reação completamente legítima, se você se sente assim, está em boa companhia.

Exercícios 4

Discussão

4.1 Por que você acha que Cardano e Bombelli não confiaram na $\sqrt{-1}$?

4.2 Os gregos eram sem dúvida os matemáticos mais sofisticados do mundo antigo, e hoje são lembrados por suas muitas contribuições à geometria. Se Bombelli voltasse no tempo, você acha que ele poderia convencer os antigos gregos a adotarem $\sqrt{-1}$?

Broca

4.3 $\sqrt{-1}\cdot(1+\sqrt{-1})$

4.4 $(1-\sqrt{-1})\cdot(1+\sqrt{-1})$

4.5 $(2+3\sqrt{-1})\cdot(2+3\sqrt{-1})$

4.6 $(5-2\sqrt{-1})^2$

4.7 $(5\sqrt{-1}-2\sqrt{-1})^2$

Calcule os valores de a e b:

4.8 $2+\sqrt{-121} = a+b\sqrt{-1}$

4.9 $\sqrt{-4} = a+b\sqrt{-1}$

4.10 $\sqrt{4} = a+b\sqrt{-1}$

Encontre uma solução, adivinhando e verificando:

4.11 $a^2 + b^2 = 50$
$a - b^3 = 6$

4.12 $a(a^2 + b^2) = 0$
$a + b = 1$

4.13 $a(a^2 + b^2) = 2$
$a + b = 2$

Pensamento Crítico

Nesta seção, tentaremos entender melhor como exatamente Bombelli resolveu o problema de Cardano, $x^3=15x+4$.

4.14 Como Bombelli justificou escrever a equação abaixo?

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} &= a + b\sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} &= a - b\sqrt{-1} \end{aligned} \qquad (11)$$

4.15 Mostre que elevar ao cubo a linha superior da Equação 11 resulta em:

$$2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + b\sqrt{-1}(3a^2 - b^2)$$

4.16 Mostre que:

$$\begin{aligned} 2 &= a(a^2 - 3b^2) \\ 11 &= b(3a^2 - b^2) \end{aligned} \qquad (12)$$

igualando as partes "normal" e "$\sqrt{-1}$" do exercício 4.15.

4.17 De volta ao exercício 4.15, elevamos ao cubo apenas a linha superior da Equação 11. Elevamos ao cubo ambos os lados da linha inferior de 11 e transformamos o resultado em um sistema de equações como no Exercício 4.16. O que você percebe?

4.18 Usando a Equação 12, e o fato de que $x=4$ ié uma solução para o nosso problema de Cardano, $x^3=15x+4$, mostre que $a = 2$ e $b = 1$.

4.19 A solução que encontramos na Equação 12, $a = 2$ e $b = 1$, significa que isso deve ser verdade:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

eleve ao cubo ambos os lados de cada equação para provar isso.

4.20 Por fim, mostre que usar nossa solução acima resulta em uma solução para o problema de Cardano, $x^3=15x+4$.

4.21 Então, a expressão abaixo é (notavelmente) equivalente a *qual* expressão?

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Se você acha que o método de Bombelli é um pouco hacker, está em boa companhia. A estranheza aqui realmente envolve em tomar a raiz cúbica de nossos novos tipos de números que involvem $\sqrt{-1}$.

Problemas como esse confundiram muitos matemáticos muito inteligentes. Nas próximas seções, encontraremos uma boa maneira de pensar sobre esses problemas que tornam esse processo muito mais simples e intuitivo.[1]

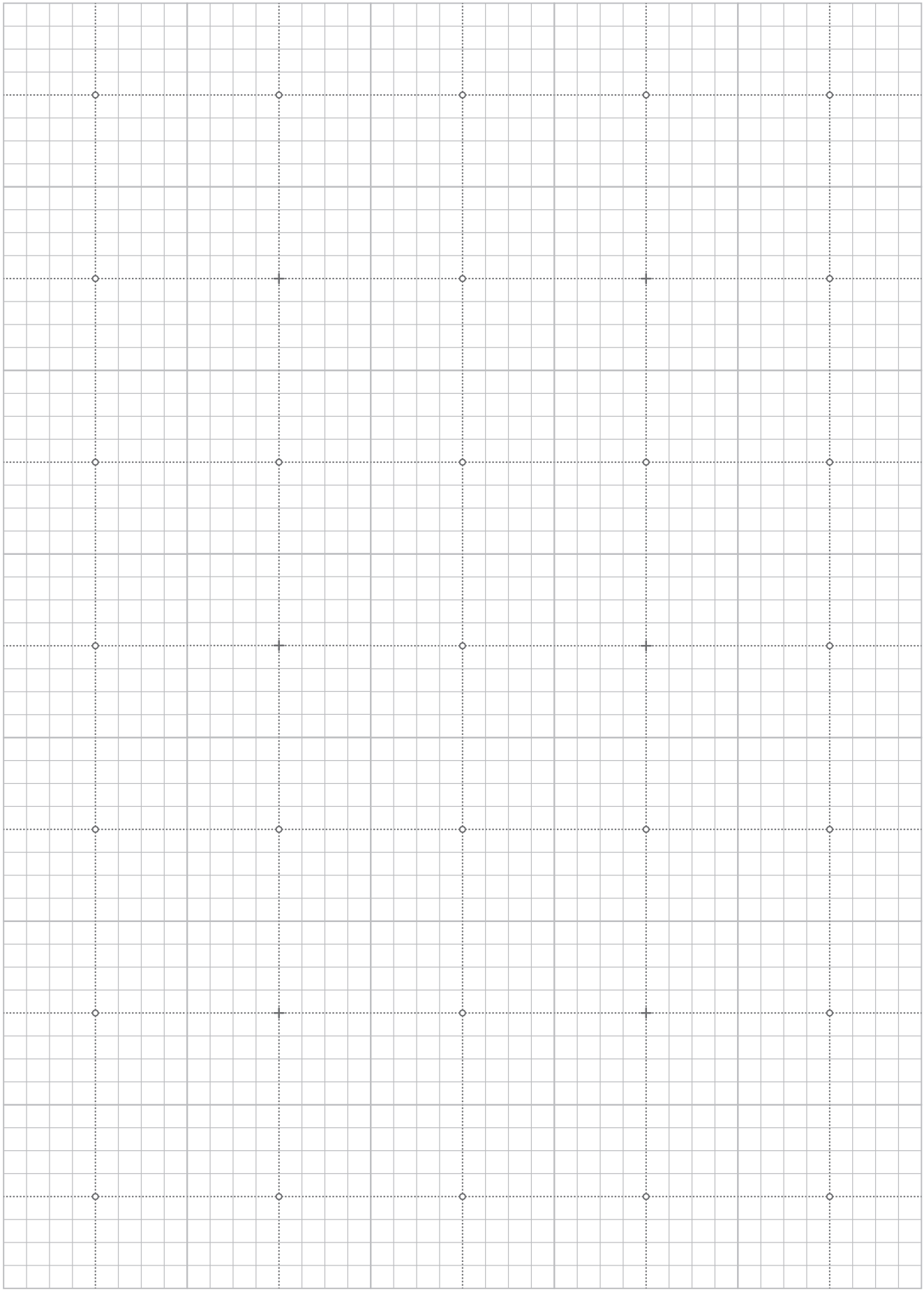
Desafio

4.22 Calcule os valores de *a* e *b*:

$$\sqrt{\sqrt{-4}} = a + b\sqrt{-1}$$

4.23 Talvez não seja de surpreender que a Equação 12 tenha mais de uma solução. Mostre que as outras soluções para a Equação 12 levam a mais soluções para o problema original de Cardano, $x^3=15x+4$. Você pode usar a tecnologia. (A menos que você seja um fodão e não precise dela.)

1 Quando abordarmos esse novo e empolgante terreno, revisitaremos esse problema nos exercícios de Pensamento Crítico da Seção 8.



Números Imaginários são Reais

Parte 5: Os Números são Bidimensionais

Paramos com a descoberta de Bombelli de que, se ele permitisse que a raiz quadrada de menos um fosse seu próprio número, ele poderia resolver problemas que vinham derrubando matemáticos por décadas.

Apesar da utilidade de sua descoberta, Bombelli e outros matemáticos geralmente a consideravam um hack, afinal, o que poderia significar calcular a raiz quadrada de um número negativo? Assim como nossos amigos zero e os números negativos antes, a raiz quadrada de menos um era geralmente vista com suspeita, porque não correspondia a nada que as pessoas pudessem pensar no mundo real.

Por esse motivo, a raiz quadrada de menos um recebeu os terríveis nomes de imaginários ou impossíveis. Um século mais tarde, Euler começou a usar o símbolo i para indicar a raiz quadrada de menos, tornando a álgebra menos desajeitada.[1]

$$\sqrt{-1} = i \qquad (13)$$

Infelizmente, o nome imaginário pegou, e ainda é assim que chamamos esses caras. Em resposta, tudo na linha numérica original recebe o nome real.[2]

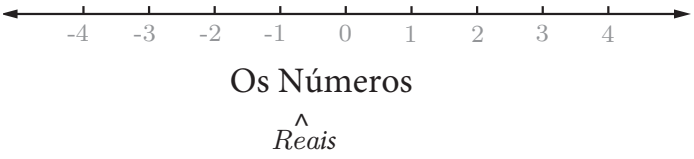


Figura 15 | Os números são renomeados. Porque tudo o que não é imaginário deve ser real, obviamente ...

Quando colocamos juntas a parte real e a imaginária, obtemos o que chamamos de número complexo.

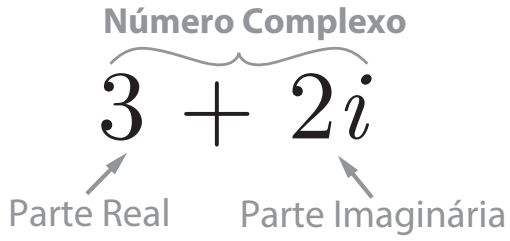


Figura 16 | Números Complexos. Quando reunimos um número real e um imaginário / lateral, o resultado é o que chamamos de número complexo.

Figura 14 | Leonard Euler. Matemático brilhante que se cansou de escrever raiz de menos um o tempo todo.

O que é notável nesse período[3] é que, embora os números imaginários e complexos tenham sido usados em cálculos e derivações[4], o significado mais profundo por trás desses números ficou oculto por mais de 200 anos após a morte de Bombelli.

Antes de mergulhar nesse significado mais profundo, vamos pensar sobre i algebricamente por um momento.

Se elevarmos i a potências cada vez mais altas, ele não aumentará como outros números. Sabemos que i ao quadrado é -1 por definição, e se continuarmos a multiplicar i por ele mesmo, vemos um padrão que se repete a cada quatro multiplicações.[5] Várias e várias e várias e várias vezes. Segure esse fato por alguns parágrafos.

Números Reais	Números Imaginários	Trabalho
$2^1=2$	$i^1=i$	
$2^2=4$	$i^2=-1$	
$2^3=8$	$i^3=-i$	$i^3=i\cdot i^2=i\cdot -1$
$2^4=16$	$i^4=1$	$i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot -1$
$2^5=32$	$i^5=i$	$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i$
$2^6=64$	$i^6=-1$	$i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot -1$
$2^7=128$	$i^7=-i$	$i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot -i$
$2^8=256$	$i^8=1$	$i^8=i^4\cdot i^4=1\cdot 1$
$2^9=512$	$i^9=i$	$i^9=i^4\cdot i^4\cdot i=1\cdot 1\cdot i$

Tabela 5 | Padrões. Quando elevamos números reais a potências cada vez mais altas, elas aumentam (para números reais maiores que 1). Curiosamente, este não é o caso dos números imaginários. Em vez disso, surge um padrão.

1 Vamos começar a fazer isso também! Estou realmente cansado de dizer e escrever raiz menos 1

2 Imagine como isso deve fazer os números laterais se sentir. "Hey, nós vamos chamar todos os números, exceto vocês, na *real*".

3 ~1600-1800 aC

4 Pensativamente

5 Tem um período de 4.

Vamos retornar a nossa amiga, a reta numérica. Lembre-se de que todos os números que conhecemos[1] aparecem aqui, exceto os números imaginários. Eles não estão em lugar algum.

Se pensarmos de volta no nosso problema original com raízes de números negativos, podemos visualizar isso usando a reta numérica. Lembre-se de que o problema que tivemos foi encontrar um número que, quando multiplicado por ele mesmo, resultaria em um negativo.

Para ver isso mais claramente, usaremos setas em vez de pontos para indicar números (Fig 17). Multiplicar um positivo por ele mesmo mantém a direção na linha numérica - permanece positivo. Se multiplicarmos por um negativo, invertemos as direções ou giramos em 180º. Elevar ao quadrado um negativo nos leva a números positivos porque começamos do lado esquerdo com o primeiro negativo e giramos 180º quando multiplicamos pelo segundo negativo. Portanto, não há como chegar a um número negativo ao quadrado, um quadrado positivo resulta em um quadrado positivo e negativo requer o início em território negativo e, quando multiplicamos pelo outro negativo, retornamos aos números positivos.

Então, o que precisamos é de algo no meio. Um número que quando multiplicado por ele gira apenas 90º, não 180º como os negativos.

É *exatamente* isso que os números imaginários fazem, i ao quadrado é menos um, ou seja, primeiro i nos coloca a 90º dos números reais positivos e multiplicar por i nos rotaciona 90º, exatamente onde queríamos estar, firmemente no território negativo.[2]

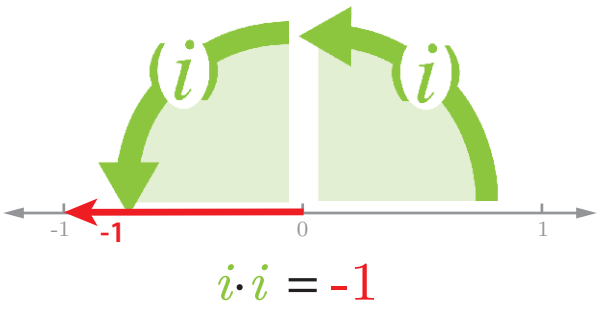


Figura 18 | Multiplicação por *i*. Uma maneira de entender a multiplicação por i é como uma rotação por 90º. A multiplicação por i novamente nos move exatamente 180º, exatamente onde queríamos parar em -1.

De volta a esse fato, volte à Tabela 5. Como multiplicar por i corresponde a uma rotação de 90º, se colocarmos nosso eixo imaginário a um ângulo reto da nossa reta numérica, nossa álgebra se encaixará perfeitamente com nossa geometria (Fig 19).

Se começamos com o número real 1 e multiplicarmos por i, algebricamente obtermos i, que geometricamente corresponde a rotação de 90º de 1 para i. Multiplicar novamente por i resulta em i ao quadrado, que, por definição, é menos 1 que novamente corresponde a uma

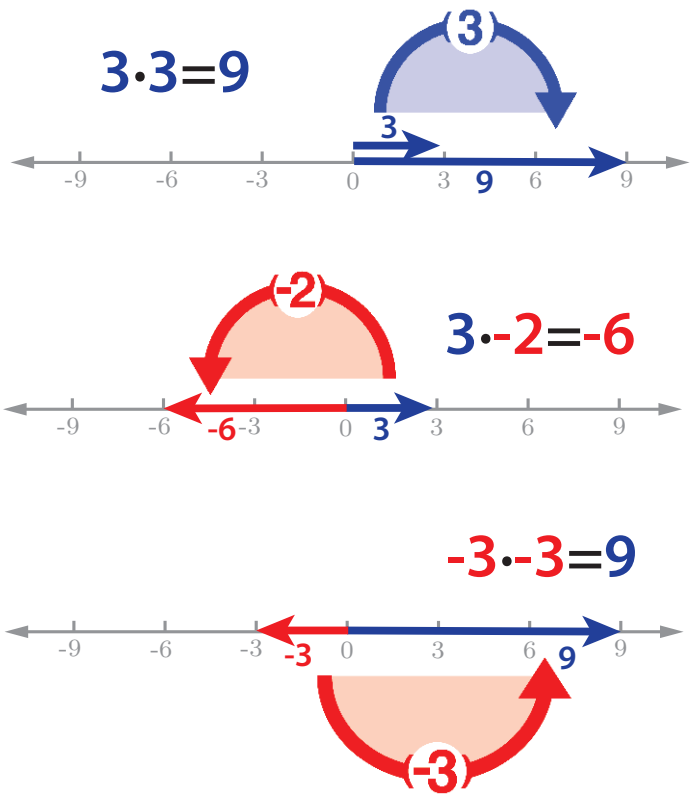


Figura 17 | Multiplicação usando a reta numérica. A multiplicação por um número positivo mantém a direção na linha numérica, enquanto a multiplicação por um negativo muda a direção. Elevar ao quadrado nunca pode resultar em um número negativo, porque multiplicar um positivo por um positivo mantém a direção, enquanto multiplicar um negativo por um negativo nos inverte para a direção positiva.

rotação de 90º a partir do i. Conforme elevamos i a potências cada vez maiores, continuamos girando, com nossos valores repetindo a cada quatro potências, assim como faziam algebricamente.

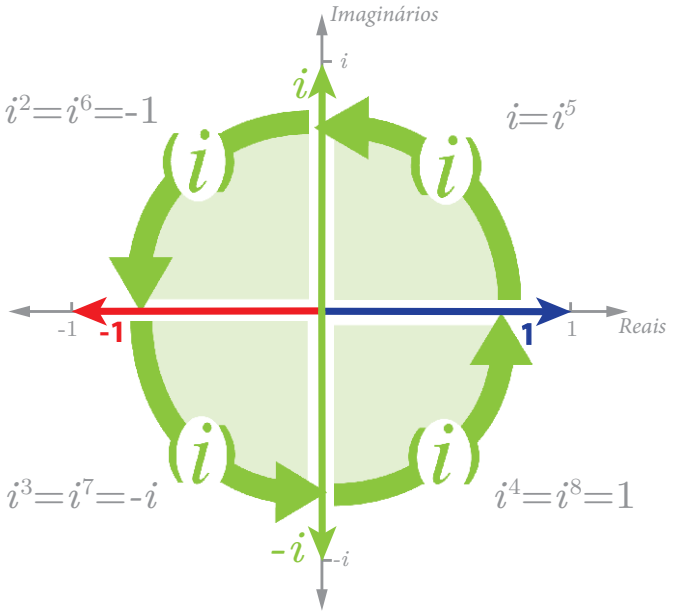


Figura 19 | Os padrões correspondem. Entender a multiplicação por i como uma rotação de 90º corresponde perfeitamente o comportamento que vimos na Tabela 5. Que louco!

1 Inteiros, zeros, frações, números racionais, números irracionais, números transcendentais

2 Menos i faz a mesma coisa!

Portanto, o insight aqui é que os números imaginários não existem à parte dos números reais, mas bem em cima deles, ocultos em uma dimensão perpendicular.

Esse é o significado mais profundo dos números imaginários. Eles não são apenas um número extra aleatório ou um hack, eles são a extensão natural do nosso sistema numérico de 1 dimensão para 2 dimensões.

Os números são bidimensonais.[1]

E o mais notável é que, se aceitarmos isso, que os números têm uma dimensão oculta, acabamos não apenas com uma matemática mais completa, mas também com ferramentas incrivelmente poderosas para ciências e engenharia.

Da próxima vez, mostraremos como e por que pensar em números dessa maneira é útil.

1 Se alguém lhe disser que isso é óbvio ou fácil, eles estão mentindo. Apesar de usar i nos cálculos, gerações de matemáticos muito brilhantes não notaram isso por mais de 200 anos.

Exercícios 5

Discussão

5.1 Por que interpretar a multiplicação por um número negativo como uma rotação de 180º faz sentido?

5.2 Por que faria sentido que os números imaginários fossem colocados em ângulo reto com os números reais?

5.3 Você acha que os números são bidimensionais? Por que?

Broca

5.4 i^{2}

5.5 i^{20}

5.6 i^{21}

5.7 i^{22}

5.8 i^{23}

5.9 i^{1000}

5.10 i^{1001}

5.11 i^{1002}

5.12 i^{1003}

5.13 i^{-1}

5.14 i^{-20}

Pensamento Crítico

5.15 Como mostra a Figura 18, a multiplicação de i por ele mesmo $(i^{2} = -1)$ pode ser interpretada como uma rotação de 180º do eixo real positivo para o eixo real negativo. Visto que $(-i)^{2}$ também é igual a -1, o que a multiplicação por $-i$ representa?

5.16 Verdadeiro ou falso?

$$\sqrt{-1} < 2$$

A ideia central desta seção, de que os números imaginários devem ser colocados em ângulo reto com os números reais, não é óbvia. Sabemos disso porque levou mais de 200 anos após a morte de Bombelli para ser descoberta. Esta ideia foi finalmente desenterrada por dois não matemáticos separadamente, Casper Wessel e Jean-Robert Argand, por volta de 1800. No entanto, como a maioria das boas ideias em matemática e ciências, esta levou algum tempo para ser aceita. Em 1831, o matemático Augustus deMorgan disse sobre o tópico:

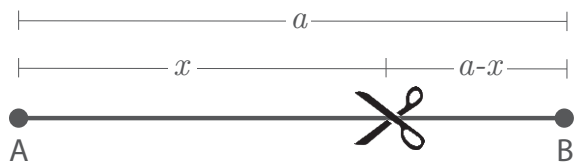
"Mostramos que o símbolo √-1 é vazio de significado, ou melhor, contraditório e absurdo ".

É interessante pensar em como exatamente os matemáticos lutaram e argumentaram sobre essas ideias durante esse período. Uma prática de longa data em matemática (que remonta principalmente aos Gregos) é a ideia da prova geométrica. Falando muito grosseiramente: se pudermos representar visualmente uma ideia matemática, ela deve ser verdade. Se essa é a maneira correta de abordar a matemática é uma questão em aberto, mas essa maneira de pensar é certamente valiosa e alimentou o desenvolvimento matemático por milênios. Quando √-1 começou a aparecer na matemática no século XVII, muitos matemáticos tentaram e falharam em encontrar uma maneira de explicar ou entender √-1 visualmente / geometricamente. Essa dificuldade contribuiu para a desconfiança de √-1.

Agora que √-1 tem uma forte interpretação visual (existindo em ângulo reto com os números reais) e tornou-se firmemente enraizado na matemática, é interessante relembrar as tentativas históricas de mostrar visualmente o que a √-1 poderia significar. Um exemplo interessante vem de uma publicação de Laz[3] Carnot, de 1803:

Dado um segmento de linha AB de comprimento a, como ele pode ser dividido em dois segmentos mais curtos para que o produto de seus comprimentos seja igual à metade do quadrado do comprimento original?

Vamos assumir temporariamente que desenhar figuras para representar a matemática é uma boa ideia e desenhar uma figura.

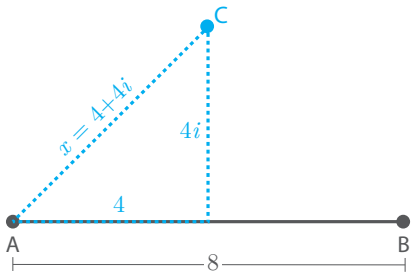


Da declaração de problemas de Carnot, podemos escrever a fórmula:

$$x(a-x)=\frac{1}{2}a^2$$

5.17 Digamos que $a = 8$ no problema de Carnot. Calcule em x, o comprimento de um de nossos segmentos.

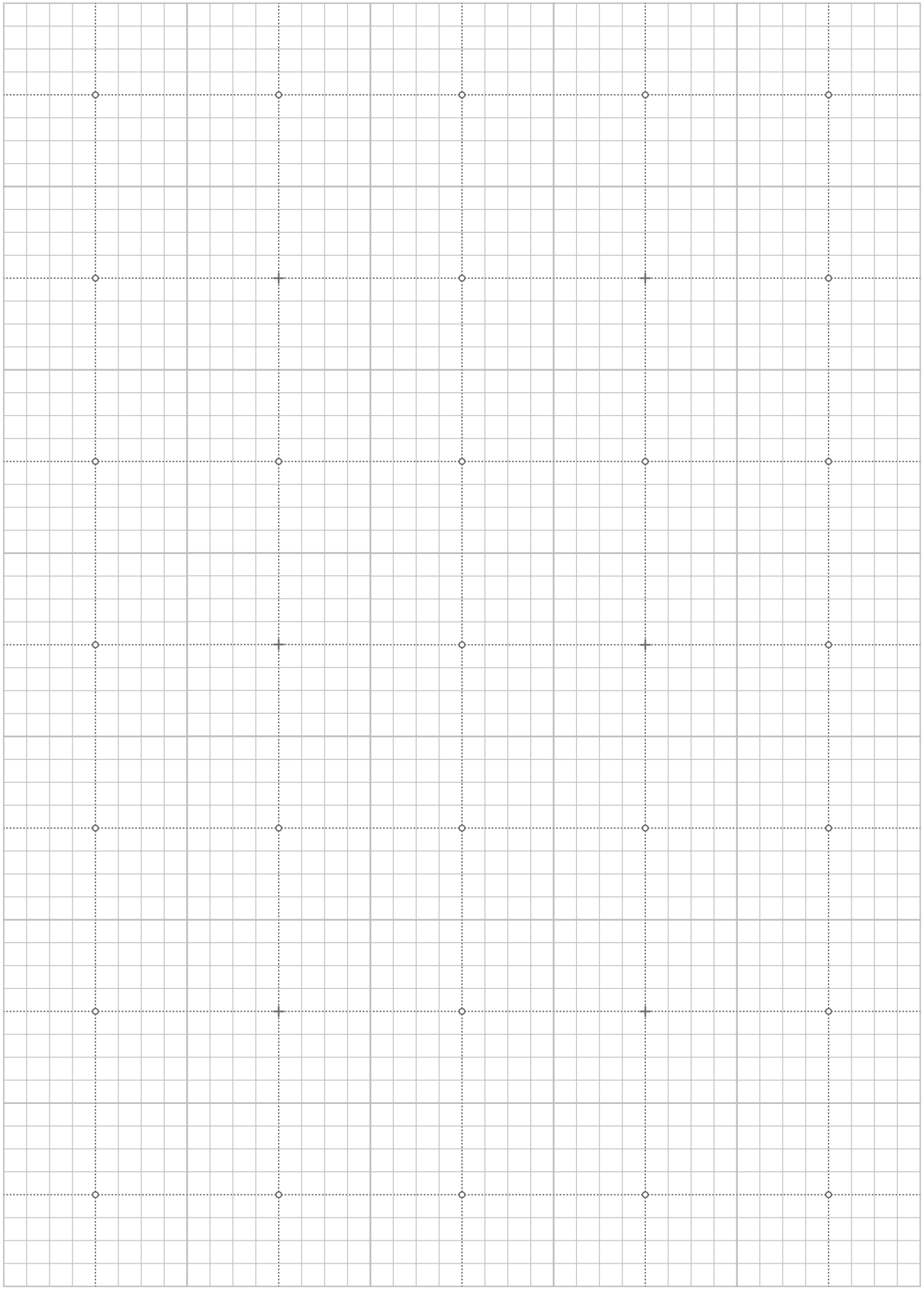
Como foi o Exercício 5.17? Quando Carnot resolveu essa equação em x, o resultado dele foi um número complexo (espero que o seu resultado também tenha sido complexo, especificamente 4+4*i* e 4-4*i*). Carnot interpretou o fato de que seu resultado foi complexo de que o ponto de corte que estamos procurando não está em AB, portanto o problema era fisicamente impossível. No entanto, outros matemáticos (como o francês Abbè Adrien-Quentin Buèe) interpretaram esse resultado de maneira diferente. A grosso modo, Buèe concordou que o problema era fisicamente impossível, mas argumentou que os resultados eram significativos. Mais especificamente, se permitirmos que números imaginários existam na dimensão perpendicular ao eixo real, obteremos algum tipo de figura para representar desta forma:



5.18 Qual é a distância entre A e C, mostrada acima?

5.19 Sua resposta para 5.18 faz sentido em termos do problema original de Carnot?

Portanto, se permitirmos que números imaginários vivam perpendicularmente aos números reais, a resposta que obtemos faz algum tipo de sentido. Claro, ainda não há como cortar a corda para alcançar o que queremos fisicamente, mas os resultados também não são sem sentido. Eles nos dizem que há uma resposta, mas precisamos mover 4 unidades na direção perpendicular (imaginária) para encontrá-la. Problemas como esse não são um argumento muito forte para √-1, o que me ajuda a entender por que esse assunto foi tão controverso por tanto tempo. Somente mais tarde, quando nossa interpretação geométrica √-1 se mostrou indispensável à matemática e à ciência, é que essas ideias se tornaram amplamente aceitas.



Números Imaginários são Reais

Parte 6: O Plano Complexo

Da última vez, chegamos a uma ferramenta incrivelmente poderosa na matemática, nas ciências e na engenharia: o plano complexo. O plano complexo é uma extensão da linha numérica, onde incluímos a dimensão imaginária verticalmente. Assim como podemos plotar coordenadas xy no plano xy, podemos plotar números complexos no plano complexo.

Esse arranjo é o motivo pelo qual Gauss preferia o termo lateral do que imaginário e inverso em vez de negativo.[1] Gauss sugeriu que deveríamos chamar os números à direita da origem direto, números à esquerda inverso e números para cima ou para baixo de lateral.

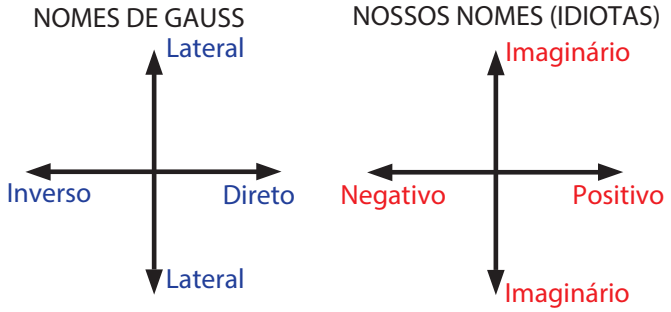


Figura 20 | Os nomes de Gauss e os nossos para os números. "Que esse assunto [os números imaginários] foi até agora cercado por uma obscuridade misteriosa, deve-se atribuir em grande parte a uma notação mal adaptada. Se, por exemplo +1, -1 e a raiz quadrada de -1 tivessem sido chamados de unidade direta, inversa e lateral, ao invés de positivo, negativo e imaginário (ou mesmo impossível), essas obscuridades estariam fora de cogitação" - Gauss.

Agora que vimos o plano complexo, vamos discutir por que ele é tão poderoso. Já vimos planos bidimensionais antes[2], onde cada eixo representa uma quantidade diferente; na verdade, começamos toda a nossa série com um.

Em um plano xy normal, não há conexão necessária entre as dimensões, nem regras sobre como elas devem se relacionar. No plano complexo, no entanto, temos as regras da álgebra com números complexos que discutimos anteriormente. Essas regras impõem uma relação muito específica e útil entre nossas duas dimensões.

Essa primeira regra é como números complexos são adicionados e subtraídos. As partes reais e imaginárias são adicionadas independentemente, fazendo com que os números complexos e o plano complexo sejam úteis para problemas que envolvem movimento em duas dimensões. Se viajarmos em uma direção por uma certa distância e depois em outra direção, podemos adicionar os componentes de cada parte de nossa viagem para encontrar a distância total que percorremos em cada direção (Fig. 21).[3]

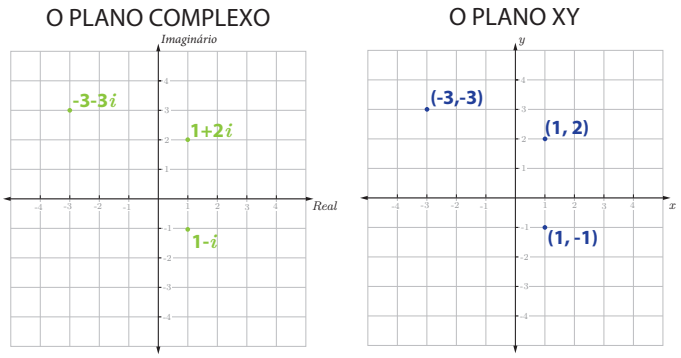


Figura 20 | O plano complexo e seu primo xy. Esses planos têm muito em comum. Ambos são equipados para a aventura com o sistemas de coordenadas cartesianas. No entanto, o plano complexo tem um toque especial que o torna muito mais intenso que seu primo entediante.

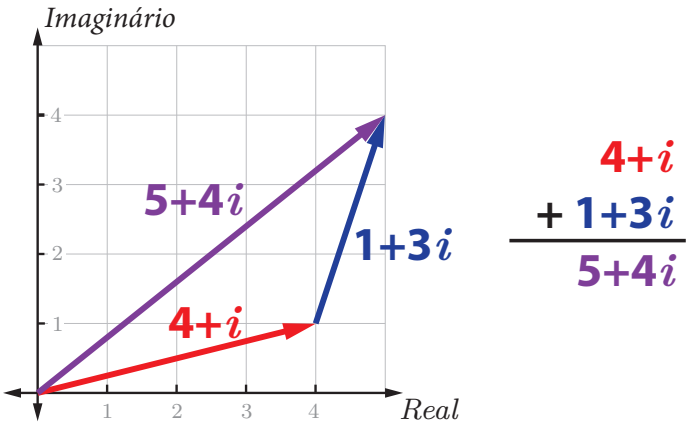


Figura 21 | Adicionando números complexos. Adicionamos números complexos adicionando as partes reais e imaginárias separadamente. Isso tem uma boa interpretação visual, adicionar números complexos é exatamente como adicionar vetores, colocamos a segunda seta no final da primeira e, onde quer que ela apareça, é o resultado.

Isso é legal, mas como você já deve saber, podemos fazer exatamente a mesma coisa com vetores. Onde os números complexos ficam realmente interessantes é na multiplicação.

Podemos multiplicar números complexos utilizando a o "chuveirinho" (propriedade distributiva) assim como fazemos com os binômios na álgebra, com a pequena complicação de que sabemos que i^2 pode ser substituído por -1.

$$\begin{aligned}&(3+2i)(1+2i)\\&=3+6i+2i+4i^2\\&=3+8i-4\\&=-1+8i\end{aligned} \qquad (14)$$

1 Vimos pela primeira vez essa ideia de Gauss na Parte 1.
2 Como o plano xy (sistema de coordenadas cartesianas).
3 Ou seja, deslocamentos.

Esta é uma solução algébrica perfeitamente válida para o nosso problema - mas é apenas metade da imagem. Existe outra maneira igualmente válida de pensar sobre a multiplicação de números complexos. E tem tudo a ver com o plano complexo.

Em vez de apenas dizer qual é essa interpretação, será mais divertido tentar descobrir isso com alguns exemplos.[1] Para descobrir esse significado mais profundo[2], tudo o que você precisa saber é o seguinte: como multiplicar os números complexos algebricamente como acabamos de fazer, como plotar números no plano complexo, o Teorema de Pitágoras e, finalmente, como usar o arco tangente para encontrar ângulos.[3]

O que é bem legal aqui é que, se você conseguir descobrir o que queremos aqui, a interpretação da multiplicação de números complexos usando o plano complexo, você terá descoberto um pouco de matemática super útil que não era conhecida pelos matemáticos mais inteligentes do planeta a pouco mais de 2 séculos atrás.

Da próxima vez, descobriremos essa interpretação da multiplicação complexa usando o plano complexo - e faremos isso com apenas quatro exemplos:

1. $(4+3i)\cdot i$
2. $(4+3i)\cdot 2i$
3. $(4+3i)\cdot(4+3i)$
4. $(2+i)\cdot(1+2i)$

Ao considerar cada um desses problemas no plano complexo e observar os padrões que surgem naturalmente, chegaremos ao significado mais profundo que estamos procurando.

Tente fazer isso em casa, pois você encontrará esses problemas detalhadamente na seção *Pensamento Crítico* dos exercícios a seguir. Mesmo que você já esteja entendendo tudo sobre os números complexos ou não tenha ideia do que estou falando - prometo que é um processo valioso - e resolveremos todos os detalhes da próxima vez.[4]

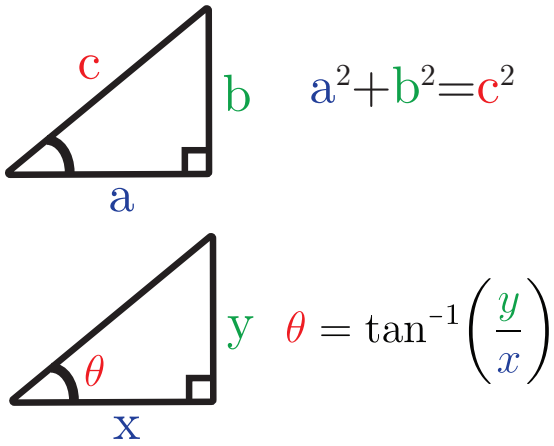


Figura 22 | Ferramentas que você vai precisar. Essas são as ferramentas necessárias para sua missão, caso você aceite. Você também precisará usar a multiplicação complexa, como mostrado na Equação 14, e plotar pontos no plano complexo, como mostra a Figura 20.

1 ...Eu prometo.

2 Assim como Wessel, Argand e Gauss fizeram alguns séculos atrás ... mas Bombelli não conseguiu!.

3 …ou você pode simplesmente pesquisar no google. Mas prometo que você aprenderá menos dessa maneira.

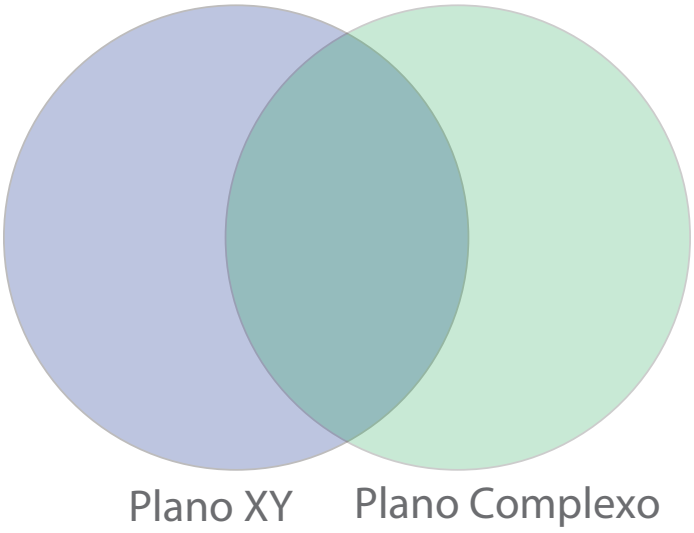
4 Faça. É sério. Faça. Faça o problema de matemática. Sente-se e faça-o. Vai demorar meia hora no máximo. E se você descobrir, pode contar a todos os seus amigos que é mais esperto do que o matemático do século 16, Gerolamo Cardano. E eles definitivamente acharão você muito legal. Com certeza. Faça.

Exercícios 6

Discussão

6.1 Por que Gauss preferia os nomes direto, inverso e lateral do que positivo, negativo e imaginário?

6.2 O que o plano XY e o plano complexo têm em comum? Em que eles são diferentes? Preencha suas respostas no diagrama de Venn super legal abaixo.



Broca

Simplifique:

6.3 $(1+i)(1+i)$

6.4 $(1+i)(1-i)$

6.5 $(2+2i)(1-2i)$

6.6 $-i(3+5i)$

6.7 $(x+(1+i))((x+(1-i))$

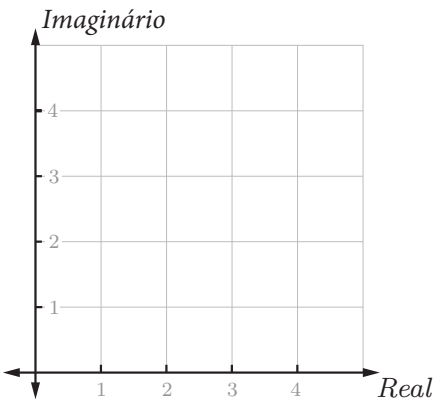
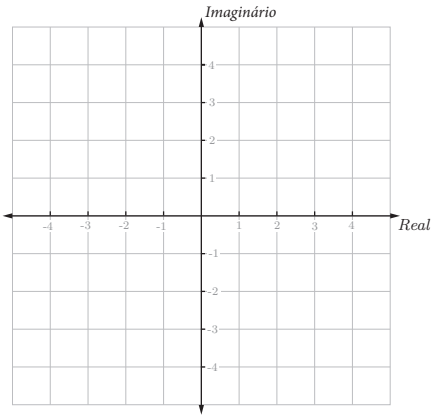
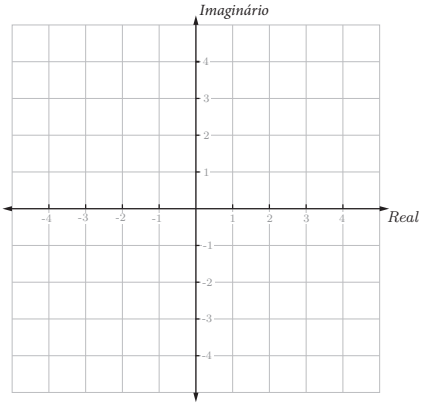
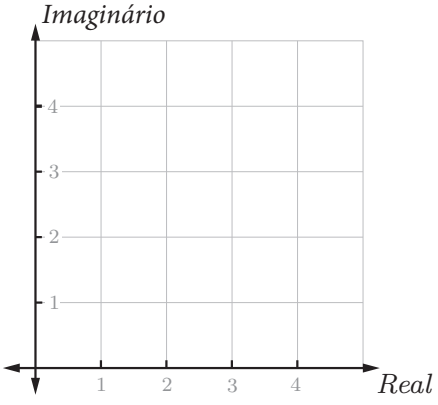
6.8 $(-2-i)^2$

Simplifique (sua resposta não deve conter um i no denominador):

6.9 $\dfrac{1}{1-i}$

6.10 $\dfrac{i}{1+2i}$

6.11 $\dfrac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{2}i}$

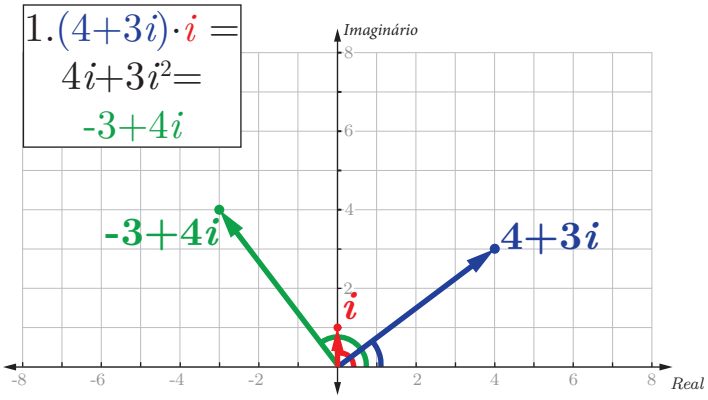
	Problema	Resolva Algebricamente	Resolva Graficamente
6.12	$(2+i) + (1+2i)$		
6.13	$(-3+i) + 2i$		
6.14	$(2+i) - (1+2i)$ ** Dica vagamente útil: tente escrever como um problema de adição.*		
6.15	$2 \cdot (2+i)$		

Pensamento Crítico

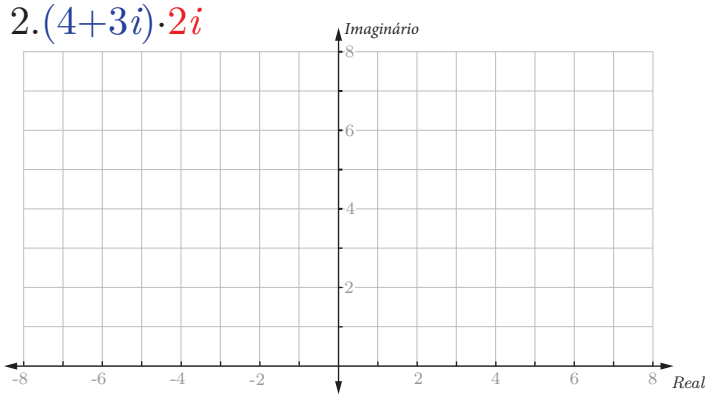
6.16 **Qual é a conexão entre multiplicação complexa e o plano complexo?** Para descobrir isso, veremos quatro exemplos. Este é de longe o meu exercício favorito em toda a pasta de trabalho. É legal porque, se você descobrir, descobrirá algo que os matemáticos não entenderam por mais de 200 anos.

a) Para começar, para cada exemplo calcule o produto, plote os dois números que estamos multiplicando juntos e plote o resultado. O primeiro exemplo foi feito para você.[1]

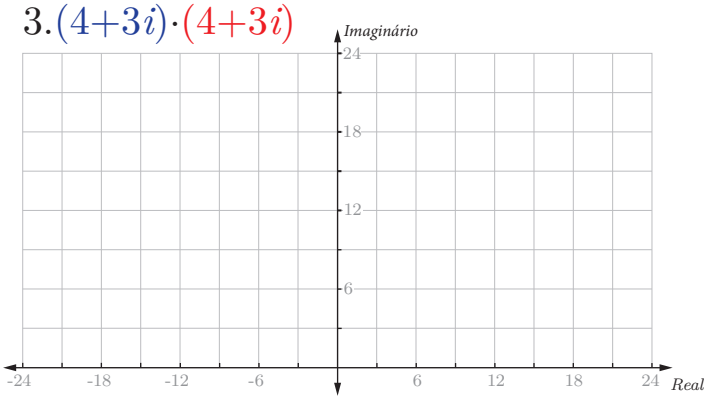
$1.(4+3i)\cdot i =$
$4i+3i^2=$
$-3+4i$



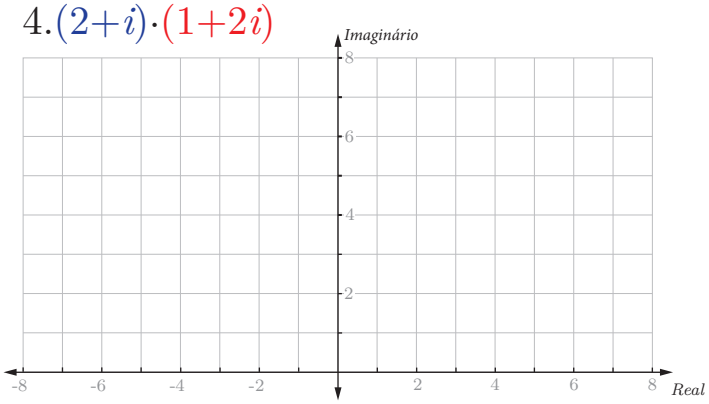
$2.(4+3i)\cdot 2i$



$3.(4+3i)\cdot(4+3i)$



$4.(2+i)\cdot(1+2i)$

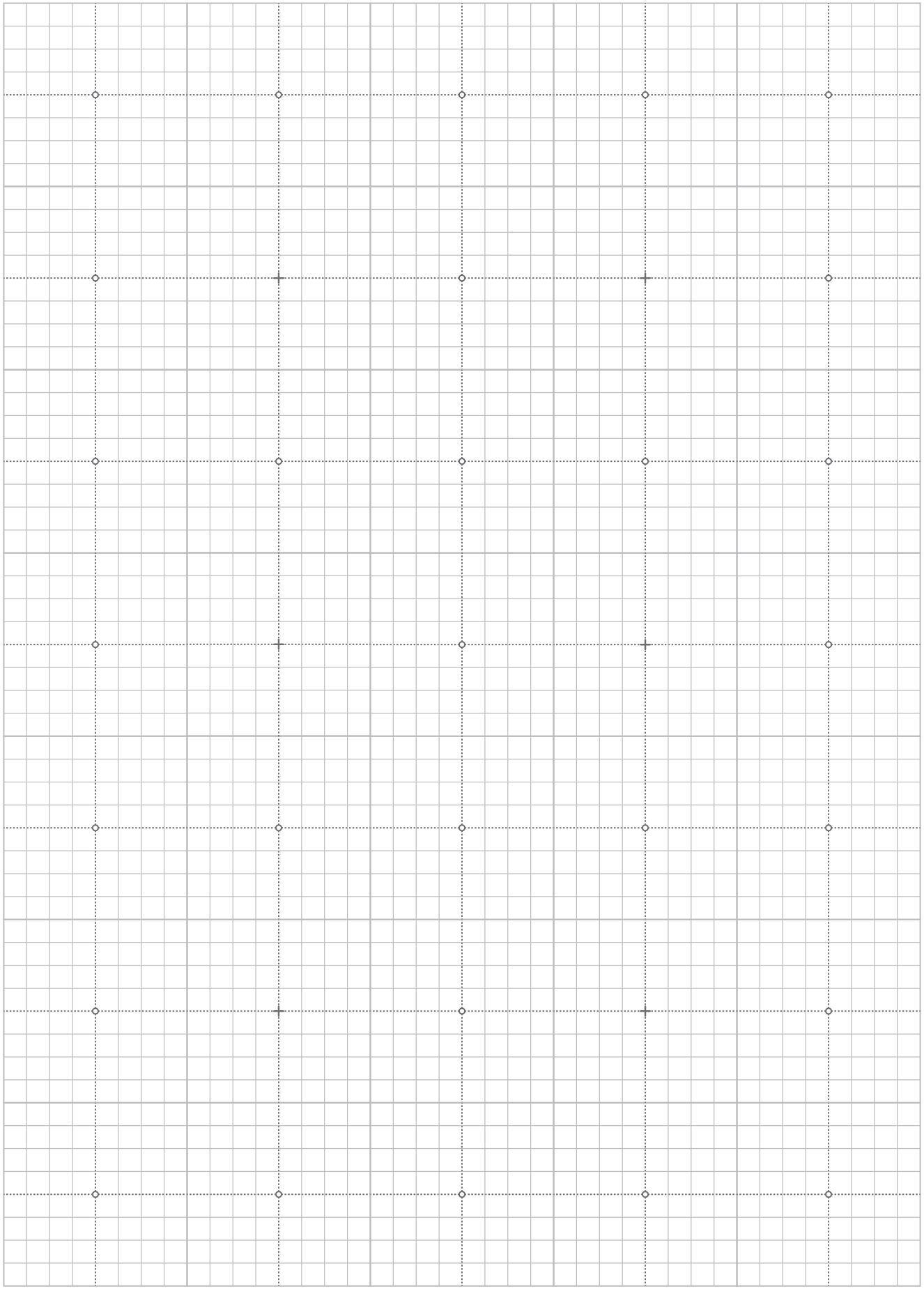


b) Use os resultados de a para preencher a tabela abaixo.

Problema	Resultado	Ângulo 1	Ângulo 2	Ângulo Resultante	Distância 1	Distância 2	Distância Resultante
$(4+3i)\cdot i$	$-3+4i$	36,9°	90°	126,9°	5	1	5
$(4+3i)\cdot 2i$							
$(4+3i)\cdot(4+3i)$							
$(2+i)\cdot(1+2i)$							

c) Que padrões você vê? Qual é a conexão entre multiplicação complexa e o plano complexo?

1 Wow, este Stephen Welch é um cara tão legal, fazendo um problema todinho pra você!



Números Imaginários são Reais

Parte 7: Multiplicação Complexa

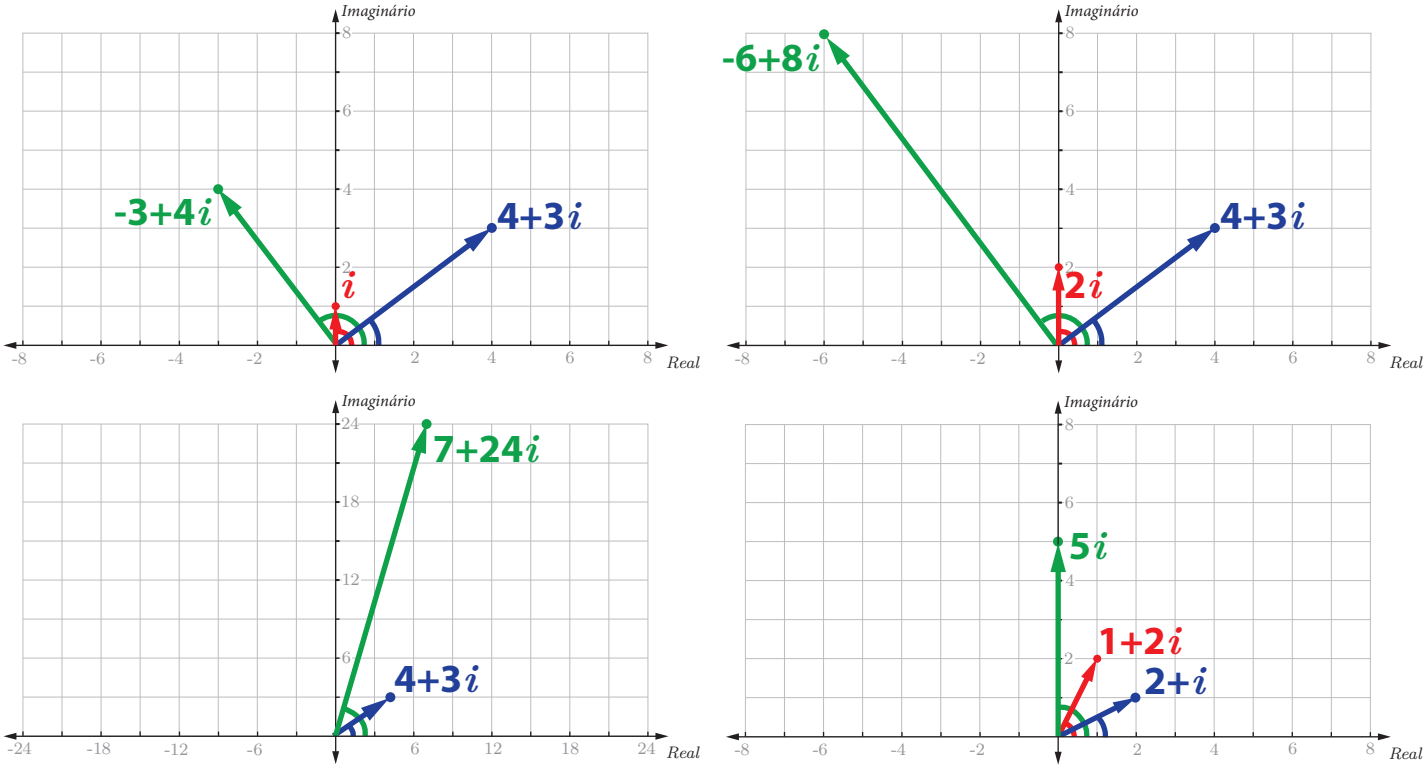


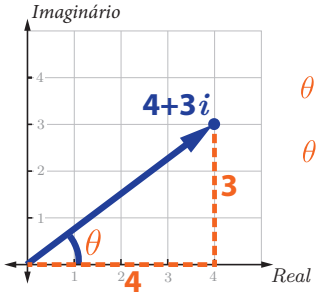
Figura 23 | Nossos quatro exemplos da última vez plotados no plano complexo. Usaremos esses exemplos para descobrir a conexão entre o plano complexo e a multiplicação complexa.

Da última vez que paramos com um problema de matemática real: qual é a conexão entre a multiplicação complexa e o plano complexo?

Para entender melhor, usaremos os quatro exemplos que mencionamos na última vez. Para cada exemplo, plotaremos os dois números que multiplicamos na Figura 23. Também calcularemos o resultado algebricamente e o adicionaremos a cada gráfico

Nosso trabalho agora é procurar padrões. De volta à parte cinco, aprendemos que i tem algo a ver com a rotação no plano complexo. Portanto, uma coisa boa a ser lembrada aqui será o ângulo que nossos números complexos fazem com o eixo real.

Podemos determinar nossos ângulos usando trigonometria, especificamente a função arco-tangente.



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\theta = 36.9^\circ$$

Figura 24 | Arco tangente. Usaremos a função arco tangente para encontrar o ângulo que cada um de nossos números complexos faz com o eixo real.

Para cada exemplo, adicionaremos o ângulo de cada número complexo à Tabela 5. Agora, vamos procurar uma conexão entre nossos três ângulos.

Problema	Ângulo 1	Ângulo 2	Resultado	Ângulo resultante
$(4+3i)\cdot i$	36.9°	90°	$-3+4i$	126.9°
$(4+3i)\cdot 2i$	36.9°	90°	$-6+8i$	126.9°
$(4+3i)\cdot(4+3i)$	36.9°	36.9°	$7+24i$	73.8°
$(2+i)\cdot(1+2i)$	26.6°	63.4°	$5i$	90°

Tabela 6 | Padrões? Qual é a conexão entre nossos ângulos em cada exemplo?

Depois de refletir um pouco[1], vemos que o ângulo do nosso resultado é exatamente igual aos ângulos dos números que multiplicamos, somados.

Esta é a primeira metade da conexão que estamos procurando: ao multiplicar no plano complexo, o ângulo do resultado é igual à soma dos ângulos dos números que

1 Hmmmm...

estamos multiplicando.

Vamos agora dar uma olhada nos nossos dois primeiros exemplos. Observe que os ângulos são idênticos, mas os números complexos resultantes não. Isso significa que somente examinar os ângulos não é o bastante para descrever suficientemente a multiplicação complexa no plano complexo - há algo a mais acontecendo.

Então, *qual* é a diferença entre esses exemplos? Parece que multiplicar por $2i$ levou nosso resultado mais longe da origem do que multiplicar por i.

Uma boa próxima pergunta é "o quão longe?"

Podemos medir a distância entre a origem e nossos números complexos, formando triângulos retângulos e usando o teorema de Pitágoras.

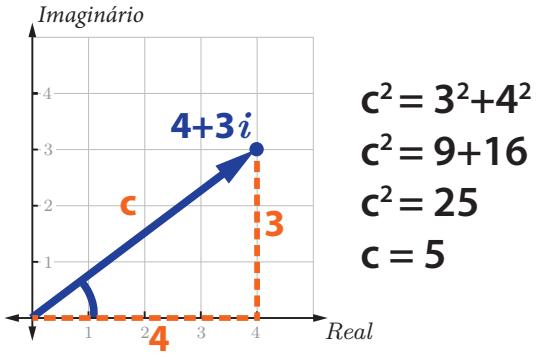


Figura 25 | Teorema de Pitágoras. Usaremos o Teorema de Pitágoras para encontrar a distância entre cada um de nossos números complexos e a origem.

Assim como antes, vamos calcular a medida para cada um dos exemplos e procurar por padrões. Colocaremos os resultados na Tabela 7.

Problema	Distância 1	Distância 2	Resultado	Distância Resultante
$(4+3i)\cdot i$	5	1	$-3+4i$	5
$(4+3i)\cdot 2i$	5	2	$-6+8i$	10
$(4+3i)\cdot (4+3i)$	5	5	$7+24i$	25
$(2+i)\cdot (1+2i)$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$5i$	5

Tabela 7 | Mais padrões? Qual é a conexão entre as distâncias de cada exemplo?

Depois de refletir um pouco mais[1], vemos que, se multiplicarmos as distâncias da origem dos números, que estamos multiplicando, obteremos a distância da origem como resultado!

Agora nós temos a figura completa. Quando multiplicamos os números complexos no plano complexo, seus ângulos em relação ao eixo real se somam e suas distâncias da origem se multiplicam.

Esta é a conexão que estávamos procurando entre a multiplicação complexa e o plano complexo.

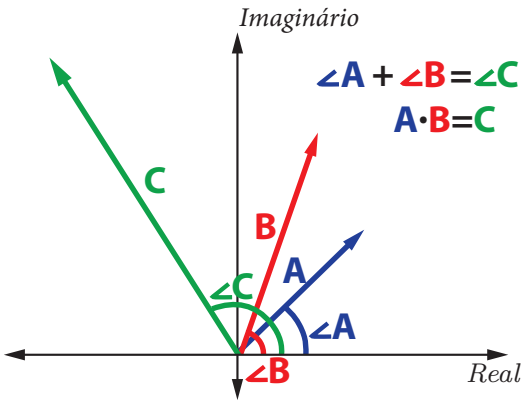


Figura 26 | Nosso resultado. Quando multiplicamos dois números complexos, seus ângulos se somam e as distâncias à origem se multiplicam.

Agora temos interpretações completamente separadas, mas completamente equivalentes, da multiplicação complexa. Para multiplicar dois números complexos juntos, podemos seguir as regras da álgebra, OU, podemos encontrar a distância de cada número da origem e o ângulo com o eixo real no plano complexo e multiplicar e adicionar cada um.

E o que é realmente legal aqui é que, embora essas abordagens pareçam *totalmente* diferentes, elas *fazem* exatamente a mesma coisa. O que estamos vendo aqui é o mesmo processo subjacente de dois pontos de vista distintos. Eu realmente gosto dessa ideia, porque me lembra que há mais na matemática do que o que vemos na página. Existem verdades mais profundas embutidas em nosso universo, e a matemática é uma forma de expressá-las.

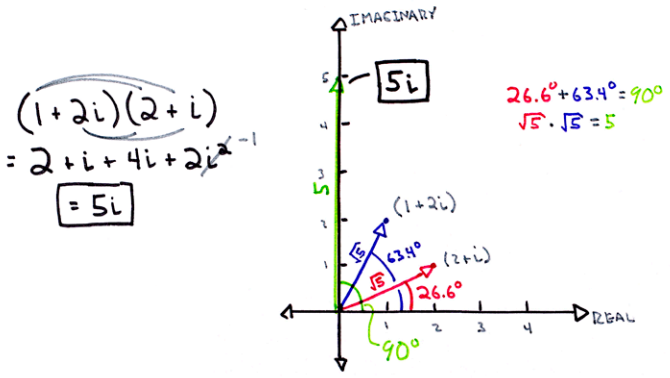


Figura 27 | Duas maneiras perfeitamente boas de multiplicar números complexos. Podemos multiplicar números complexos algebricamente, como mostrado à esquerda, ou podemos usar o plano complexo, como mostrado à direita.

1 Também hmmmmm...

Agora que fizemos nossa descoberta, vamos formalizar um pouco nossos resultados. Descobrimos que as quantidades que devemos observar ao multiplicar os números complexos no plano complexo são a distância da origem e o ângulo do eixo real.

Essas quantidades acabam sendo tão importantes que nós as usamos como outra forma de escrever números complexos. Em vez de escrever os números complexos como a soma de suas partes reais e imaginárias[1], nós os escrevemos como sua distância da origem e do ângulo que eles fazem com o eixo real. Isso é chamado de *forma polar* e a distância da origem recebe um nome especial, módulo.[2]

Multiplicar números complexos na forma polar é super fácil - apenas multiplicamos os módulos e somamos os ângulos. A divisão também é bastante simples, especialmente se comparada à divisão na forma retangular, para dividir na forma polar, dividimos nossos módulos e subtraímos nossos ângulos.

Da próxima vez, mostraremos que essa descoberta não é apenas legal, mas útil. Usaremos o plano complexo para tornar os problemas difíceis de álgebra mais fáceis, rápidos e mais intuitivos.

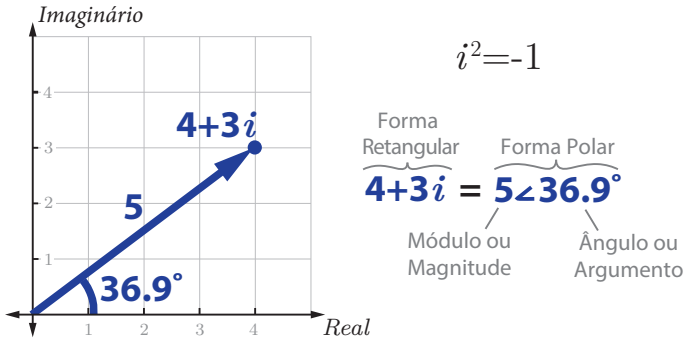


Figura 28 | Duas formas de escrever números complexos. Podemos escrever os números complexos na forma retangular ou polar.

1 Forma retangular!

2 Módulo também é chamado de magnitude, e o ângulo também é chamado de argumento.

Exercícios 7

Discussão

7.1 A ideia principal desta seção é que existem dois métodos muito diferentes, mas completamente equivalentes, que podemos usar para multiplicar números complexos. Como essas abordagens aparentemente diferentes podem produzir exatamente os mesmos resultados?

7.2 Você pode pensar em um exemplo em que o uso da forma polar de números complexos facilitaria a vida?

7.3 Por que você acha que demorou mais de 200 anos para descobrir a conexão entre a multiplicação complexa e o plano complexo?

Broca

Converta para a forma polar:

7.4 $1+i$

7.5 2-3i

7.5 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Converta para a forma retangular:

7.6 $1\angle 45^\circ$

7.7 $5\angle 30^\circ$

7.8 $5\angle 150^\circ$

7.9 $3\angle 270^\circ$

Pensamento Crítico

Resolva esses caras:

7.10 $(1+i)(1+i)$

7.11 $(\sqrt{2}\angle 45^\circ)(\sqrt{2}\angle 45^\circ)$

7.12 Como 7.10 e 7.11 estão relacionados?

Converta para a forma polar, resolva e converta sua resposta novamente para a forma retangular. Para obter crédito extra, desenhe uma imagem bonita que mostre o que está acontecendo.[1]

7.13 $(2+2i)(2+2i)$

7.14 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

7.15 $\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$

7.16 $(1+i)(1+i)(1+i)$

7.17 $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)$

7.18 $\frac{2i}{1+i}$

7.19 $\frac{-2}{i}$

1 Cada problema vale 1 ponto de crédito extra. 5 pontos de crédito extras podem ser convertidos em 1 ponto legal, a critério do detentor do ponto. Ao conseguir 3 pontos interessantes, exija algum tipo de prêmio de seu professor / professor / amigos / familiares. Seja persistente.

Desafio

Na escola, talvez você precise decorar algumas fórmulas como estas:

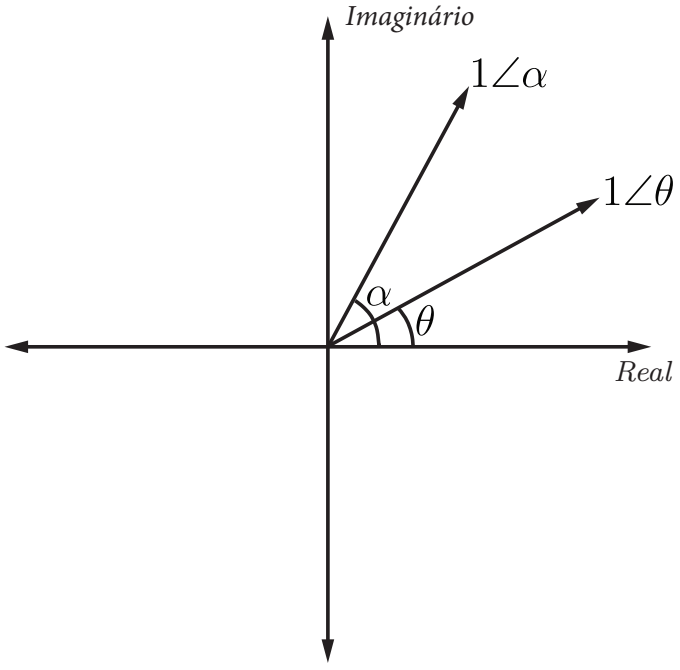
$$(1)\ \cos(\theta+\alpha)=\cos(\theta)\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\alpha)$$
$$(2)\ \operatorname{sen}(\theta+\alpha)=\operatorname{sen}(\theta)\cos(\alpha)-\cos(\theta)\operatorname{sen}(\alpha)$$
$$(3)\ \cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)$$
$$(4)\ \cos(2\theta)=2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

Já que decorar é basicamente a pior coisa do mundo[1], vamos tentar achar um jeito de nunca mais precisar memorizar essas fórmulas de novo.

7.20 Vamos começar considerando dois números complexos, cada um com módulo igual a 1:

$$1\angle\alpha \qquad 1\angle\theta$$

Para tornar as coisas um pouco mais visuais, digamos que nossos dois números complexos sejam algo assim no plano complexo:



Em termos de α e θ, calcule o produto:

$$(1\angle\alpha)(1\angle\theta)$$

e adicione-o ao gráfico acima no local correto.

7.21 Converta para a forma retangular usando seno e cosseno:

a) $1\angle\alpha$

b) $1\angle\theta$

c) $1\angle(\alpha+\theta)$

7.22 Substitua suas respostas de 7.21 em[2]:

$$(1\angle\alpha)(1\angle\theta)=1\angle(\alpha+\theta)$$

Expanda e simplifique seu resultado.

7.23 Deduza as Equações 1 e 2 igualando as partes reais e imaginárias de cada lado do seu resultado a 7.22.

7.24 Deduza as Equações 3 e 4 considerando o caso especial em que $\alpha=\theta$.

1 Decorar não é aprender!

2 Espero que esta seja a equação que você obteve em 7.20!

Números Imaginários são Reais

Parte 8: Bruxaria Matemática

Vamos resolver uma simples equação:

$$x^3 = 1 \qquad (15)$$

Que valor de x faria essa equação ser verdadeira?

Se você disse 1, bom trabalho, 1^3=1. Encontramos uma resposta. Agora, há mais respostas?

Na parte um, introduzimos o Teorema Fundamental da Álgebra, que diz que um polinômio deve ter tantas raízes[1] quanto seu maior expoente. Podemos reorganizar nossa equação como x^3-1=0 para torná-la um polinômio mais óbvio, e como nosso maior expoente[2] é 3, essa equação deve ter 3 soluções.

Existe uma maneira de encontrar todas as três respostas sem usar números complexos ao longo do caminho, mas envolve fatoração de cubos perfeitos e a fórmula de "Bháskara" - e passa por 7 etapas.

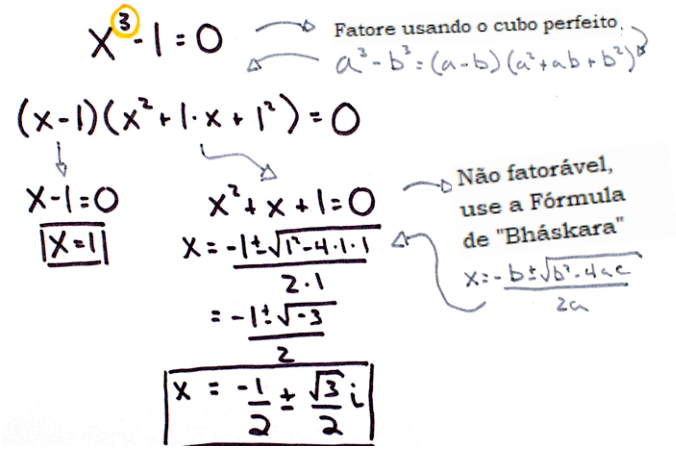


Figura 29 | Resolvendo a Equação 15 por fatoração. Podemos resolver a Equação 15 fatorando, mas fazê isso dessa maneira é muito demorado. E você deve se lembrar de como fatorar a diferença de cubos perfeitos. E a fórmula de "Bháskara". Quanto trabalho...

Em vez disso, vamos tentar resolver o problema visualmente usando o plano complexo. Nossa pergunta, em palavras, é: quais números, quando multiplicados por si mesmos 3 vezes, são iguais a 1?

$$x^3 = x \cdot x \cdot x = 1$$

Vamos pensar sobre esse problema usando a forma polar dos números complexos que discutimos na última vez. Podemos pensar em 1, no domínio complexo, como um número com um módulo igual a 1 e um ângulo de zero. Ou 360°.[3]

Quando multiplicamos números no domínio complexo, seus módulos se multiplicam e seus ângulos se somam. Nosso resultado deve ter uma magnitude de 1, já

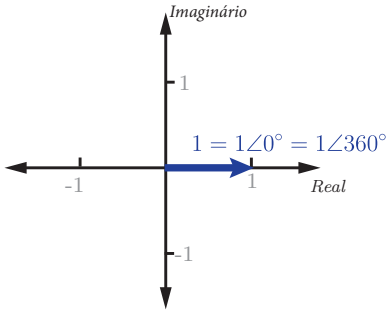


Figura 30 | O número um. O número real 1 mostrado no plano complexo.

que 1 vezes 1 vezes 1 é...1[4], se atribuirmos a cada um dos nossos x's um módulo igual a 1,[5] a magnitude resultante resultará em 1 - fácil. Mas e os nossos ângulos?

Sabemos que, ao multiplicar números complexos, nossos ângulos somam, então precisamos de um ângulo, que quando somado 3 vezes resulta em 0.[6] Ou 360°. 360 parece um pouco mais razoável, então qual é o ângulo correto aqui?

Bem, como estamos dividindo 360 em três partes iguais, a resposta certa aqui é 360 dividido por 3 ou 120°. Quando juntamos isso com módulo igual a 1, temos uma segunda solução! É o número complexo com uma magnitude de 1 e um ângulo de 120°.

Esta resposta faz muito sentido no plano complexo:

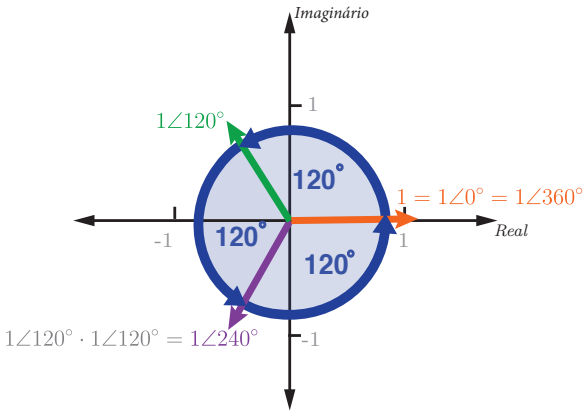


Figura 31 | Uma solução! Nossa segunda solução é mostrada em verde, o número complexo com um ângulo de 120 graus e módulo igual a 1. Aqui, podemos ver que multiplicar esse número por si mesmo 3 vezes resulta em 1.

Multiplicar nossa resposta por si mesma resulta em um módulo igual a 1 em um ângulo de 240°, e multiplicar por nossa resposta novamente nos coloca exatamente onde queríamos estar - em um módulo igual a um e um ângulo de 360° - também conhecido como...um.

1 Ou seja, soluções, zeros da função.
2 Ou seja, grau.
3 ou -360°, ou -720°, 720°, ou 1080°, ou se você quiser, 360°*n, onde n é um inteiro.
4 Ou 1 a qualquer potência que você quiser...
5 Pois 1 = raiz cúbica de 1. 1*1*1 =1!
6 Isso realmente dá nossa primeira resposta, 1!

Então encontramos uma resposta, o número complexo com módulo igual a 1 e um ângulo de 120°. Isso pode parecer uma resposta estranha para a aula de álgebra, então vamos colocá-lo de volta na forma cartesiana.

Nosso bom e velho amigo, o círculo unitário, pode economizar algum tempo aqui. Gostaríamos de saber quais as coordenadas retangulares de um ponto no círculo unitário em um ângulo de 120°.[1] De acordo com o círculo unitário, nossa resposta é -1/2 para a parte real e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ para a parte imaginária.[2]

Ok, agora que temos uma resposta em forma retangular, vamos tentar! Se multiplicarmos nosso resultado:

$$\begin{aligned}
x^3 &= 1 \\
\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 &= 1 \\
\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= 1 \\
\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{3}{4}i^2\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= 1 \\
\left(\frac{1}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= 1 \\
\left(-\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= 1 \\
\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{3}{4}i^2\right) &= 1 \\
\frac{1}{4}+\frac{3}{4} &= 1
\end{aligned}$$

Muito legal, né? Somos capazes de resolver de forma visual um problema difícil de álgebra usando o plano complexo e obter exatamente a mesma resposta que obtivemos por meio da fatoração de cubos, como mostra a Figura 29.

Finalmente, encontramos apenas duas respostas até agora, e o teorema fundamental da álgebra exige que tenhamos 3.

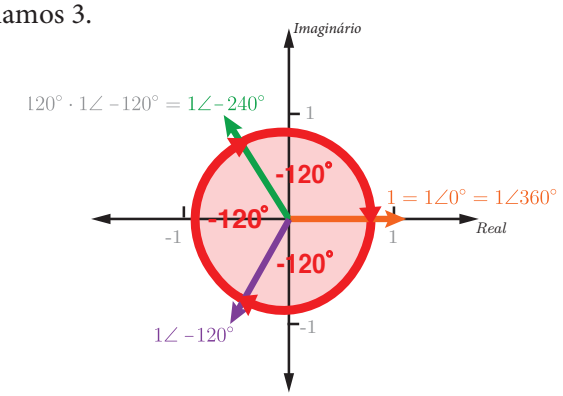


Figura 33 | Nossa solução final para x^3=1. Encontramos nossa solução final, o número complexo com módulo igual a 1 e ângulo de -120°, movendo-se no sentido horário ao redor do círculo em três passos iguais.

1 Sabemos que estamos no círculo unitário porque nosso número tem módulo igual a 1

2 Você também pode usar um triângulo retângulo especial 30/60/90 ou seno e cosseno…x = 1*cos(120°), y=1*sin(120°).

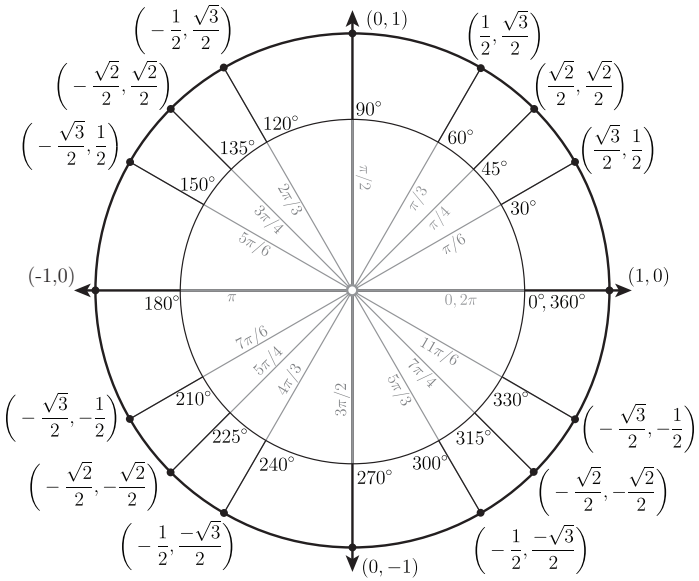


Figura 32 | Seu BFF o círculo unitário. Sim, faz parte do negócio. Hoje, isso nos ajudará a converter entre coordenadas polares e retangulares.

Encontramos a resposta que faltava indo no sentido contrário em nosso círculo. Se começarmos no -120 e multiplicarmos nosso número por ele mesmo 3 vezes, também vamos parar no número 1 puramente real. Então a resposta que nos faltava era $-1/2-(\sqrt{3}/2)i$.[3]

Então, encontramos todas as respostas para o nosso problema x^3=1 e mostramos como o plano complexo nos permite encontrá-las visualmente. Nesse caso, o uso de números complexos nos economizou *algum* tempo com a abordagem algébrica e para problemas mais complicados, o plano complexo se torna ainda mais útil. Por exemplo, e se mudarmos o expoente do nosso problema original para digamos 8? Ou seja, x^8-1=0. Poderíamos tentar fatorá-lo[4], ou apenas dar uma olhada rápida em nosso plano complexo e perceber que, assim como nosso último problema, onde precisávamos dividir o círculo unitário em 3 partes iguais, precisamos, nesse caso, dividir nosso círculo em 8 partes iguais. Portanto, nossas soluções precisam estar a 45°, novamente ao longo do círculo unitário. Todas as 8 respostas. Feito.[5]

Da próxima vez, mostraremos como os números imaginários são a peça do quebra-cabeça que falta para completar a álgebra.

3 Observe que nossas 2 raízes complexas são conjugados complexos; esse sempre será o caso quando nossos polinômios tiverem coeficientes reais.

4 $(x^4-1)(x^4+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$…

5 Uma solução seria $\sqrt{2}/2+(\sqrt{2}/2)i$. Esta é chamada de a raiz n-ésima do problema unitário e tem várias aplicações legais, como a Transformada de Fourier!

Exercícios 8

Discussão

8.1 Por que a equação $x^3=1$ tem 3 soluções?

8.2 Como o plano complexo facilita problemas difíceis?

8.3 Por que você acha que o matemático Jacques Hadamard escreveu:

"O caminho mais curto entre duas verdades no domínio real passa pelo domínio complexo."

-Jacques Hadamard, ~1945

Broca

Responda na forma retangular:

8.4 $(1+i)^6$

8.5 $(1+i\sqrt{3})^6$

8.6 $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2}$

8.7 $\sqrt{i}$

8.8 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}}$

8.9 $\sqrt[3]{8i}$

Pensamento Crítico

Digamos que recebemos um número complexo com módulo[1] igual a 1, e um ângulo[2] de θ . Podemos converter nosso número para a forma retangular da seguinte maneira:

$$1\angle\theta = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$$

8.10 Usando uma imagem, mostre por que a equação acima é legítima.

Agora vamos considerar o que acontece quando aumentamos nosso número a vários expoentes. Escreva cada resposta em forma retangular, usando sen, cos e θ .[3]

8.11 $(1\angle\theta)^2$

8.12 $(1\angle\theta)^{1/3}$

8.13 $(1\angle\theta)^n$

Sua resposta para 8.13 deve ser algo como:

$$(1\angle\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

Isso é conhecido como o teorema de De Moivre.[4] Observe que o lado direito da equação às vezes é abreviado usando cis: $cis(x) = cos(x) + isen(x)$. O teorema de De Moivre pode ser expandido para números que têm módulos diferentes de 1 sem muita dor de cabeça. Digamos que recebemos um número complexo com um módulo ou r e um ângulo igual a θ. Podemos converter o número para a forma retangular utilizando:

$$r\angle\theta = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$$

8.14 Usando uma imagem, mostre por que a equação acima é legítima.

Agora vamos considerar o que acontece quando aumentamos nosso novo número a vários expoentes. Escreva cada resposta na forma retangular, usando r, sen, cos e θ .

8.15 $(r\angle\theta)^2$

8.16 $(r\angle\theta)^{1/3}$

8.17 $(r\angle\theta)^n$

1 ou magnitude

2 ou argumento

3 Sinta-se à vontade para explicar com uma figura para obter um ponto de crédito extra por problema.

4 Embora nunca apareça em seu trabalho ... faz sentido ...

Lá atrás, na Parte 4 (Exercícios 4.14-4.21), nós discutimos como Bombelli resolveu o problema de Cardano, permitindo a existência dos números imaginários. Uma parte essencial do argumento de Bombelli foi esse fato bastante chocante:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$$

Agora, com a ajuda dos mais de 200 anos de avanço na matemática que cobrimos desde a Parte 4, mostraremos que a equação acima precisa ser verdadeira, sem exageros! Isso é notável quando consideramos quantos problemas que essa equação deu a Cardano e Bombelli.

8.18 Para começar a mostrar que a equação acima é verdadeira, converta essas duas partes da equação para a forma polar. Arredonde suas respostas para 4 casas decimais.

a) $2+\sqrt{-121}$

b) $2-\sqrt{-121}$

8.19 Usando seus resultados da página anterior, calcule a raiz cúbica de suas respostas do exercício 8.18 e converta seus resultados para a forma retangular.

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$

b) $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

8.20 Adicione suas respostas às 8.19 a e b. Se o resultado for 4, bom trabalho! Pense em como Cardano e Bombelli ficariam impressionados com sua bruxaria matemática. Se sua resposta não for 4, confira as soluções na parte de trás do livro.

Desafio

Sabe-se que o brilhante matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), co-pai do cálculo, é conhecido por ter lutado profundamente com os tópicos que abordamos aqui.

"Eu não entendo como ... uma quantidade pode ser real, quando números imaginários ou impossíveis são usados para expressá-la."

-Leibniz

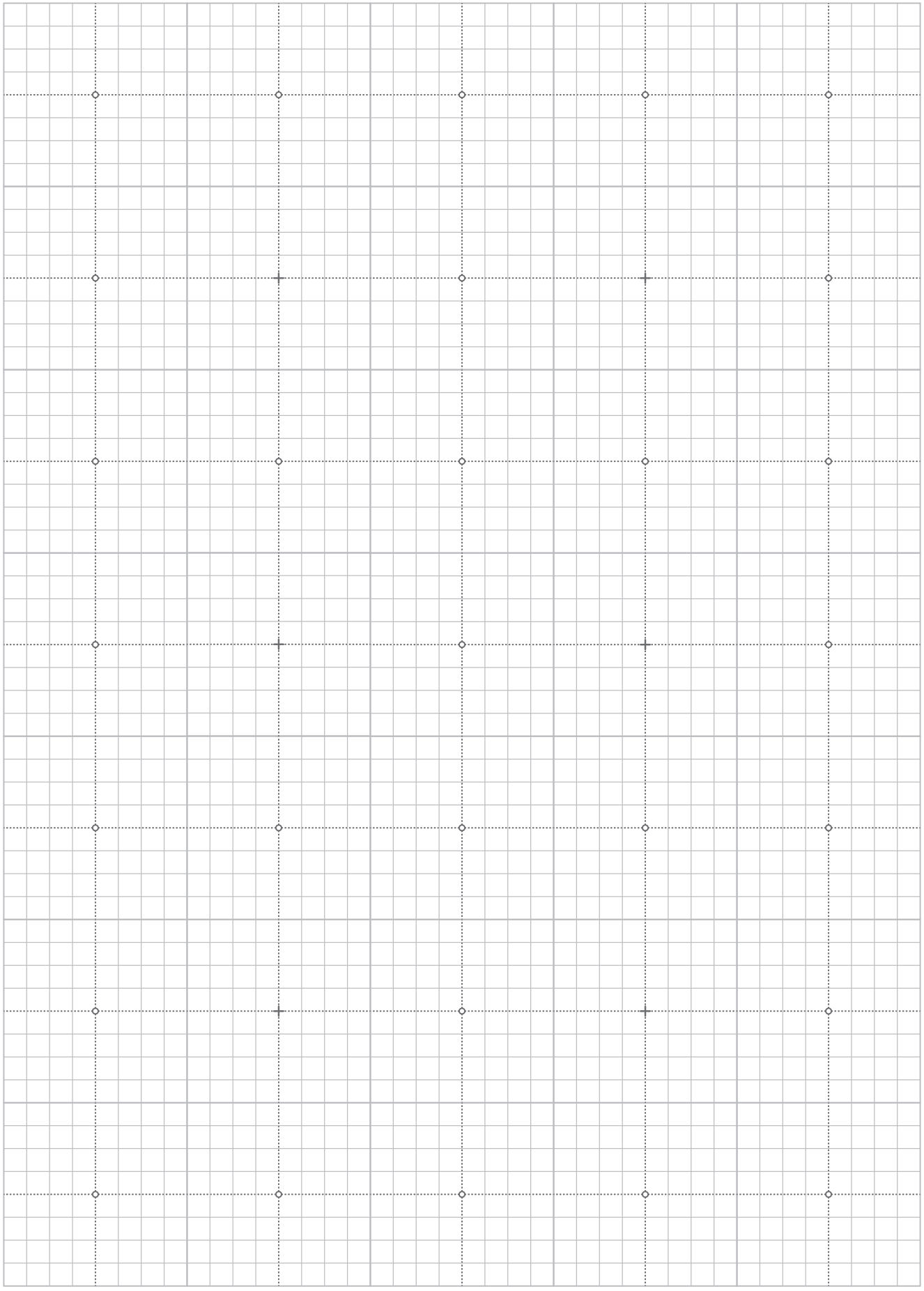
Após sua morte, o trabalho não publicado de Leibniz revelou que ele calculava alguns casos especiais da fórmula de Cardano repetidas vezes, presumivelmente procurando ideias mais profundas, como as que nos foram entregues. Ao resolver as cúbicas $x^3=13x+12$ e $x^3=48x+72$ usando a fórmula de Cardano, Leibniz descobriu que:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{-\frac{1225}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{-\frac{1225}{27}}}=4$$

e:

$$\sqrt[3]{-36+\sqrt{-2800}}+\sqrt[3]{-36-\sqrt{-2800}}=6$$

8.21 Mostre que as duas equações acima são verdadeiras.



Números Imaginários são Reais

Parte 9: Fechamento

Antes de terminarmos a série e resolvermos o problema da parte um, vamos falar sobre como os números complexos são a peça que falta no quebra-cabeça que completa a álgebra.

Na parte dois, vimos como a definição do que é um número evoluiu ao longo do tempo, começando com os números naturais. Os Egípcios descobriram que esses algo estava faltando nesses números[1], e é bastante óbvio para nós hoje que os números naturais são incompletos.

No entanto, como vimos em números complexos, nem sempre é óbvio que está faltando algo em nossos números. Felizmente, existe uma maneira mais sofisticada de determinar se temos todos os tipos de números de que precisamos - a ideia matemática de fechamento.

Vamos jogar um jogo. Vou lhe dar um conjunto numérico definido e uma operação algébrica. Quero que você me diga se quaisquer dois números desse conjunto, quando combinados com a operação, fornecem um número que não está no conjunto. Nosso primeiro conjunto são os números naturais e nossa operação é a adição.

CONJUNTO NUMÉRICO	OPERAÇÃO
Naturais: 1, 2, 3...	+

Figura 34 | Os números naturais são fechados em relação à adição?

Portanto, a pergunta é: existem dois números naturais que, quando somados, produzem algo que *não* é um número natural?

Depois de um pouco de improvisação, deve parecer bastante razoável que quaisquer dois números naturais, somados, resultem em outro número natural. Matematicamente, podemos dizer que o conjunto dos números naturais está *fechado* em relação à adição.

Em seguida, vamos tentar o conjunto de números naturais e a operação de subtração.

CONJUNTO NUMÉRICO	OPERAÇÃO
Naturais: 1, 2, 3...	-

Figura 35 | Os números naturais são fechados em relação à subtração?

Para alguns pares de números naturais, como 6 e 4, as coisas funcionam muito bem, 6 menos 4 é 2, que é um número natural. Mas e quanto a 2 menos 6? Isso resulta em uma resposta que não é encontrada em nenhum lugar em nosso conjunto de números naturais; portanto, nosso conjunto não é fechado para a subtração. Precisamos expandir nosso conjunto para incluir o zero[2] e os números negativos para que este seja o caso.

1 Frações!

2 Pois, por exemplo, 3-3=0.

Portanto, o conjunto dos números naturais não é fechado para a subtração, mas o conjunto dos números inteiros é. Ao expandir nosso sistema numérico, podemos garantir que qualquer problema envolvendo a subtração que possamos fazer terá uma resposta.

NÚMEROS	SÍMBOLO	EXEMPLOS	FECHADO SOB
Naturais	$\mathbb{N}$	1,2,3...	+
Inteiros	$\mathbb{Z}$	...-2, -1, 0, 1, 2...	+, -

Tabela 8 | Fechamento na subtração. Para garantir que possamos lidar com todos os problemas de subtração, precisamos expandir nosso sistema numérico para incluir números inteiros.

À medida que incluímos mais operações algébricas, devemos continuar a expandir nosso sistema numérico. A divisão exige que expandamos nosso sistema numérico para incluir frações, também conhecidas como números racionais. Racional vem da palavra *ratio*[3], números racionais são números que podem ser expressos como a razão de dois números inteiros.[4]

Podemos mostrar a relação entre os números que cobrimos usando outra invenção de Euler.[5] Usando um diagrama de Euler,[6] podemos expressar visualmente a ideia de que um conjunto inclui outro, todos os números inteiros são números racionais, porque sempre podemos expressar eles como uma razão de dois números inteiros, mas nem todos os números racionais são números inteiros.

Figura 36 | Relação entre números naturais, números inteiros e números racionais. Todos os naturais são inteiros, mas nem todos os inteiros são naturais.

Vamos recapitular. Até agora, chegamos a números racionais, que incluem números como 1, 0, -5,1 e -2/3. Em quais operações os números racionais são fechados?

3 Que vem da palavra grega *logos*, que significa palavra! Palavra.

4 Como 2/3

5 Sua outra invenção da qual estamos fazendo uso é $i = \sqrt{-1}$

6 Estes são basicamente os diagramas de Venn mais flexíveis.

7 Com a notável exceção de dividir por 0 - esta é uma nova lata de vermes… chamada cálculo.

Bem, quaisquer dois números racionais somados produzem outro número racional, então podemos dizer que os números racionais são fechados para a adição. Podemos dizer o mesmo para subtração, multiplicação e divisão.[7]

Agora, o que dizer sobre potências e raízes? Um número racional elevado a um expoente racional sempre produz um resultado racional?

Segue-se que para problemas como $(2/9)^2$ não há problema algum, nosso resultado é racional.[1] Onde encontramos problema é em coisas como $(2)^{1/2}$. Elevar algo a $1/2$ é o mesmo que calcular a raiz quadrada, então isso é equivalente a $\sqrt{2}$. Vamos guardar o argumento completo[2] para outro dia, mas segue-se que $\sqrt{2}$ não é racional, não há dois inteiros que quando divididos, sejam exatamente iguais a $\sqrt{2}$. Já que números como esse não são racionais, nós os chamamos de irracionais.

Há mais uma classe de números que são ainda mais legais que os irracionais - os números *transcendentais* com π e e, também vamos guardá-los para outro dia.

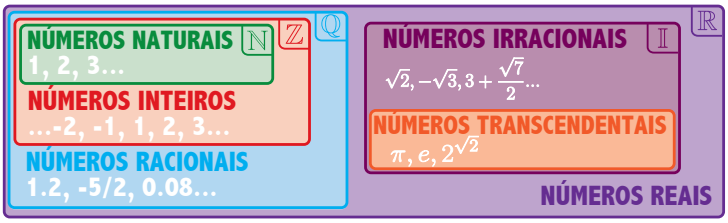


Figura 37 | Os números reais. Os números reais são um grupo inclusivo! Números reais incluem números naturais, números inteiros, números racionais, números irracionais e até números transcendentais. Mas ainda parece que estamos perdendo alguma coisa...

1 $(2/9)^2 = (4/81)$, que é super racional!
2 Isso é bem legal, significa que existem buracos na reta dos números racionais! Ver exercício 9.19.

Então, expandimos nosso sistema de números novamente para incluir os irracionais, e todos esses números, juntos, formam o que chamamos de números reais.

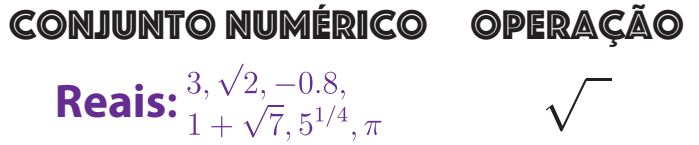


Figura 38 | Os números reais são fechados para a radiciação? Hora de uma última rodada do jogo favorito de todos.

Vamos jogar nosso jogo mais uma vez. Nosso conjunto agora é os números reais e nossa operação é a radiciação. Temos fechamento? Existem números reais que, quando criamos alguma raiz, produzem um resultado que não é um número real?

NÚMEROS	SÍMBOLO	EXEMPLOS	FECHADO SOB
Naturais	$\mathbb{N}$	1,2,3...	+ x $()^x$
Inteiros	$\mathbb{Z}$	...-2, -1, 0, 1, 2...	+ - x
Racionais	$\mathbb{Q}$	.4, 1/2, -16	+ - x ÷
Reais	$\mathbb{R}$	.4, $\sqrt{2}$, 1/2, π, 51	+ - x ÷
Complexos	$\mathbb{C}$	$\sqrt{2}$, .5, π, $2i$	+ - x ÷ $\sqrt{}$ $()^x$

Tabela 9 | Fechamento. Expandindo nossos sistemas numéricos para incluir o fechamento em mais operações algébricas.

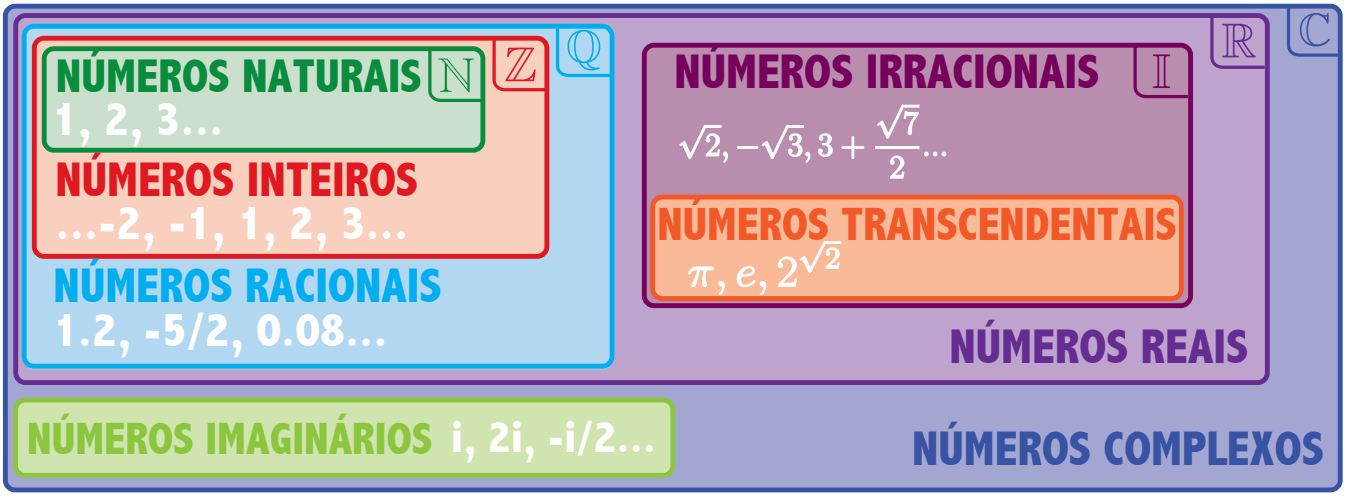


Figura 39 | Finalmente. Todos os números necessários para responder a qualquer pergunta de álgebra que possamos pensar usando adição, subtração, multiplicação, divisão, potências e raízes. Os números complexos são fechados em todas as operações algébricas.

A resposta é que, apesar de todos os tipos de números que incluímos ao longo do caminho, ainda está faltando alguma coisa. Só podemos escrever uma expressão usando números e raízes reais - por exemplo, $\sqrt{-9}$ - que não tem solução nos números reais.

Para que esse problema tenha uma resposta, precisamos expandir nosso sistema numérico mais uma vez para incluir números imaginários. E tomando todos os nossos números reais de antes, juntamente com os números imaginários, chegamos à nossa classe mais ampla de números - os números complexos.

Inicialmente, os matemáticos estavam preocupados que mesmo números complexos não fossem suficientes, que problemas como $\sqrt{i}$, resultariam em um número ainda mais complexo, talvez até um número tridimensional, em vez de nossos números complexos bidimensionais.

Felizmente, isso acabou não sendo o caso. De fato, podemos avaliar $\sqrt{-i}$, novamente usando nosso bom amigo, o plano complexo. Como $-i$ possui módulo igual a 1 e um ângulo de -90°, nós só precisamos de um número com módulo igual a 1 e um ângulo de -45°, de acordo com o círculo unitário, $\sqrt{2}/2 - (\sqrt{2}/2)i$

Portanto, a raiz quadrada de menos i é apenas outro número complexo, não há necessidade de um novo número tridimensional. De fato, não há operação no mundo usando adição, subtração, multiplicação, divisão, potências e raízes com as quais os números complexos não podem lidar.[1]

Os números imaginários são a peça exata que faltava, os quais completam a álgebra.

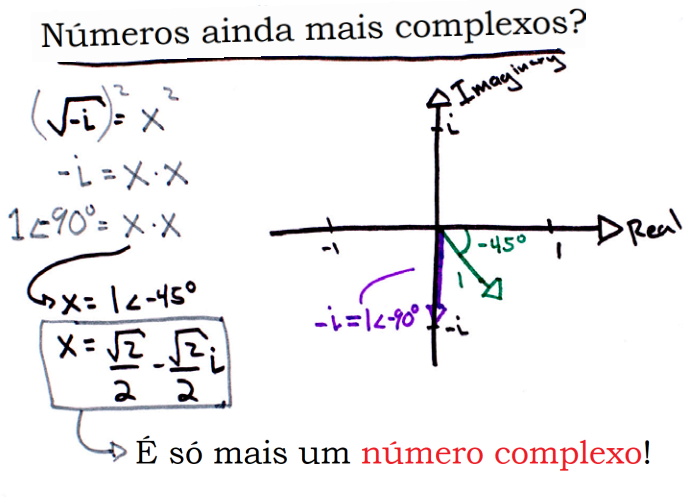


Figura 40 | Os números do complexo são fechados nas operações com as quais nos preocupamos. Mesmo um problema que soa maluco como $\sqrt{-i}$ resulta em números complexos. Enquanto mantivermos a multiplicação, divisão, adição, subtração, potências e raízes, não há necessidade de um número louco e "mais complexo".

1 Exceto dividir por zero – isto nos leva até o cálculo.

Exercícios 9

Discussão

9.1 O que é fechamento matemático?

9.2 Por que o fechamento pode ser importante para cientistas, engenheiros e outras pessoas que usam matemática?

9.3 Os números reais parecem bastante completos. Que evidência temos que indicam que isso não é verdade?

Broca

Hora para mais algumas rodadas do jogo do fechamento! Determine se o conjunto está fechado na operação especificada. Se o conjunto não estiver fechado, forneça um contra-exemplo.

9.4 Inteiros, multiplicação.

9.5 Inteiros, divisão.

9.6 Números Reais, divisão.

9.7 Números Irracionais, adição.

9.8 Números Irracionais, multiplicação.

9.9 Números Transcendentais, subtração.

9.10 Números imaginários, multiplicação.

9.11 Números Inteiros, potências.

Pensamento Crítico

A ideia de fechamento matemático pode ser aplicada a conjuntos além daqueles que discutimos até agora. Por exemplo, vamos considerar o conjunto de todos os números pares (caso você tenha esquecido, 0 é par).

9.12 Os números pares estão fechados na adição? E na subtração? Para um ponto de crédito extra, prove que sua resposta é verdadeira para quaisquer dois números pares.

9.13 Os números pares estão fechados sob a multiplicação? E sob a divisão? Para $\sqrt{2}$ pontos de crédito extras, prove que sua resposta é verdadeira para quaisquer dois números pares.

9.14 Em que operações algébricas os números ímpares estão fechados?

Considere a operação completamente criada:

$$\Lambda(\mathrm{a,b}) = (\mathrm{a} + \mathrm{b})\ \mathit{modulo}\ 4$$

Onde módulo 4 significa o resto após dividir por quatro. Por exemplo, $9\ \mathit{modulo}\ 4 = 1$, pois o 4 cabe no 9 duas vezes, deixando um resto igual a 1. Números menores que 4 não mudam, por exemplo, $3\ \mathit{modulo}\ 4 = 3$.

9.15 Mostre que $\Lambda(5,\ 3) = 0$, e $\Lambda(2,\ 1) = 3$.

9.16 O conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ é fechado sob Λ?

9.17 Defina um conjunto que pode ser fechado sob Λ.

Desafio

Usando a forma polar incrível de números complexos que aprendemos na Parte 7, resolva o problema abaixo e confirme se os resultados pertencem ao conjunto dos Números Complexos.

9.18 $(-i)^{1/6}$

$\sqrt{2}$ é irracional. Isso significa que $\sqrt{2}$ não pode ser expressa como uma razão de dois números inteiros. Esse fato não se encaixava tão bem com a visão de mundo ordenada dos gregos antigos, e a lenda até levou ao assassinato de Hipaso de Metaponto. Vamos provar esse fato perigoso por contradição. Para fazer isso, vamos supor, como fizeram os gregos, que $\sqrt{2}$ é racional. Se $\sqrt{2}$ é racional, então podemos escrever $\sqrt{2} = m / n$, para inteiros m e n, digamos que m e n são os menores termos de nossa fração, para que eles não tenham fatores em comum.

a. Eleve os dois lados da equação $\sqrt{2} = m/n$, e mostre como podemos concluir pelo resultado que m deve ser par.

b. Já que m é par, podemos escrever $m = 2k$, para algum inteiro k. Ao substituir $2k$ por m no seu resultado do item a, mostre que n também deve ser par.

c. Por que m e n não podem ser ambos pares?

Como m e n não podem ser ambos pares, chegamos a uma contradição, indicando que nossa suposição original, de que $\sqrt{2}$ é racional deve ser falsa, nos deixando com o fato inevitável de que $\sqrt{2}$ é irracional.

Números Imaginários são Reais

Parte 10: Funções Complexas

Então…que diabos está acontecendo na Figura 2?

Vimos essa figura na parte 1 e depois continuamos a não falar sobre ela por dez capítulos. E, nesse ponto, eu não culparia você de verdade se você pensasse que isso fosse uma ficção científica projetada para deixá-lo animado com problemas de álgebra entediantes.

Mas antes de atribuirmos isso a efeitos especiais desnecessários,[1] lembre-se de onde veio essa figura. Começamos nossa conversa na parte 1 com uma equação que parecia não ter solução: $x^2+1=0$.

Depois de todo o trabalho que fizemos até agora, você provavelmente pode ver como encontrar a resposta algebricamente: subtraia um de ambos os lados e tire a raiz quadrada, resultando em $x=i$ e $x=-i$, feito.

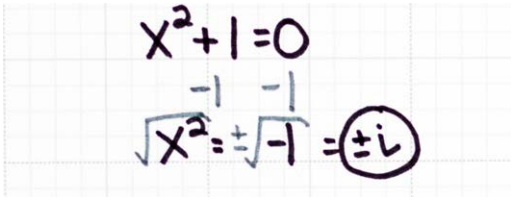


Figura 41 | Resolvendo nossa equação da parte um. Depois de todo o trabalho que fizemos até agora, isso não é tão ruim.

Isso é legal, mas para realmente entender nossa figura da parte 1, precisamos nos aprofundar um pouco mais e conversar sobre funções de variáveis complexas.

Os tipos de funções para os quais a maioria de nós está acostumada, funções de números reais[2], têm entradas e saídas que podem ser visualizadas cada uma usando uma única dimensão. Isso significa que todos os nossos valores de x se ajustam a uma única reta numérica, assim como nossos valores de y. Parece bastante razoável, então[3], que, se quisermos descobrir como x e y estão relacionados, devemos colocar nossa reta numérica x voltada para um lado em um pedaço de papel e a nossa reta numérica y no mesmo pedaço de papel, voltado para o outro lado. Isso forma uma grade bidimensional conhecida como Sistema de Coordenadas Cartesianas.

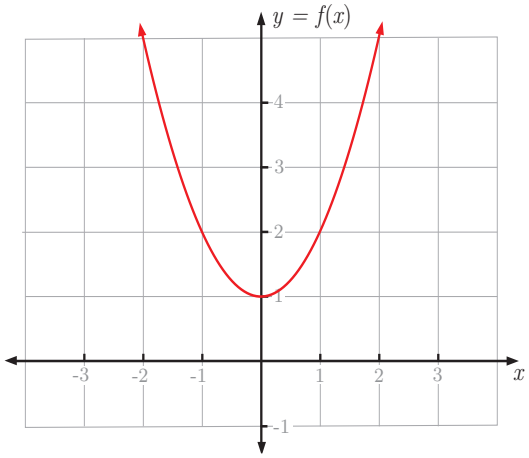


Figura 42 | É fácil tomar o sistema de coordenadas cartesianas por certo. Colocar nossas retas numéricas x e y em um ângulo reto uma com a outra não é tão óbvio!

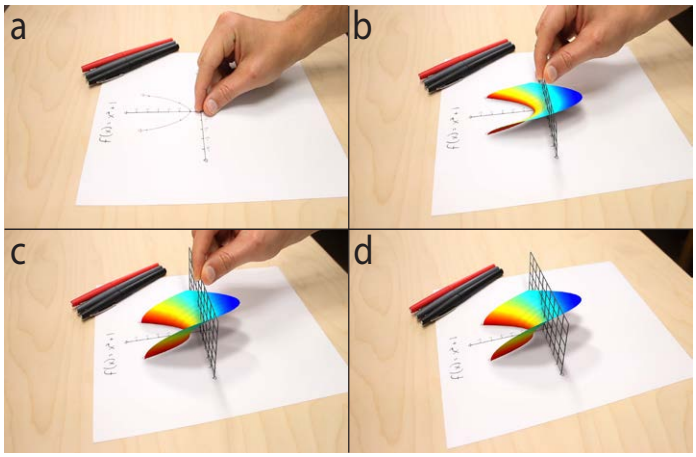


Figura 2 | Gráfico de $f(x) = x^2+1$ onde x inclui números imaginários. As figuras a-d me mostram "puxando" a função da página.

Aparentemente inventado por René Descartes no século XVI, depois de observar moscas rastejando, o Sistema de Coordenadas Cartesianas é uma ferramenta super poderosa para entender a relação entre duas variáveis.

O Sistema de Coordenadas Cartesianas é poderoso porque nos permite pegar ideias abstratas, como funções, e transformá-las em algo que nossos cérebros podem captar muito mais intuitivamente, figuras. Ao dar a cada ponto do plano suas próprias coordenadas, Descartes conseguiu reunir as duas maiores áreas de matemática da época: álgebra e geometria. Isso ajudou muito nos primeiros esforços na classificação de funções por Isaac Newton e outros, e hoje os Sistema de Coordenadas Cartesianas aparecem em todos os lugares; nos ajudando a fazer todo tipo de coisa, como detectar tendências em dados.

Então, tudo isso é divertido e maravilhoso - mas o Sistema de Coordenadas Cartesianas vem com um aviso.

Só funciona em 2 dimensões.[4]

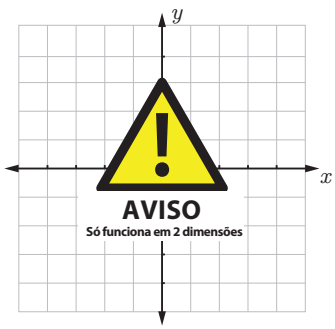


Figura 43 | Limites do Sistema de Coordenadas Cartesianas. Só funciona em duas dimensões :(

1 Transformers, alguém?

2 Funções com valor real

3 Embora ninguém tenha entendido isso até Descartes e Fermat no século XVII

4 Bem, também 3, mas chegaremos lá.

Essa limitação se torna um problema real quando começamos a pensar em funções de variáveis complexas.

Essas funções recebem números complexos e, na maioria das vezes, também produzem números complexos. Isso significa que os números que inserimos e depois tiramos de nossa função não se encaixam mais nas linhas numéricas. Agora precisamos de dois planos complexos para acompanhar nossos números: um para a entrada e outro para a saída.

Isso levanta uma questão importante - se, ao visualizar essas funções, o que realmente interessa é a conexão entre a entrada e a saída, como visualizamos o que está acontecendo nos dois planos simultaneamente?

Poderíamos tentar ajustar nossos planos de entrada e saída de alguma forma, como fizemos com nossas linhas numéricas para funções com valor real, mas rapidamente encontramos um problema muito sério. Como você provavelmente sabe, o universo em que vivemos possui três dimensões espaciais, portanto, não há como encaixar as quatro dimensões espaciais necessárias em uma única estrutura que nosso cérebro possa compreender, simplesmente ficamos sem dimensões.

Felizmente, existem algumas maneiras muito inteligentes de ver a relação entre duas variáveis complexas - mas antes que possamos chegar a elas, precisamos pensar na matemática das funções complexas.

Embora o uso de planos separados para nossa entrada e saída não seja uma solução perfeita, essa abordagem ainda pode nos ajudar a começar. Vamos experimentar com a nossa função original, $f(x)=x^2+1$. Antes de começarmos, faça uma rápida alteração no nome da variável para facilitar as coisas no futuro. Mudaremos o nome de nossa variável de entrada de x para z,[2] e chamaremos nossa variável de saída w. Já que z e w cada um tem uma parte real e imaginária, vamos dar um passo a mais e dar o nome dessas partes, chamamos $z = x + iy$, em que x e y representam a parte real e imaginária de z,[3] e chamamos $w = u + iv$.

$$w = f(z) = z^2+1 \tag{16}$$
$$z = x + iy$$
$$w = u + iv$$

Assim como podemos usar tabelas para acompanhar nossas entradas e saídas para funções de valor real, também podemos criar tabelas para acompanhar as entradas e saídas de funções complexas. No entanto, agora precisamos de quatro colunas para acompanhar nossas quatro variáveis: x, y, u, e v.

1 Provavelmente.

2 Muitos recursos usam x para denotar um número real, e z para um número complexo. Eu não tenho ideia do porquê.

3 Respectivamente.

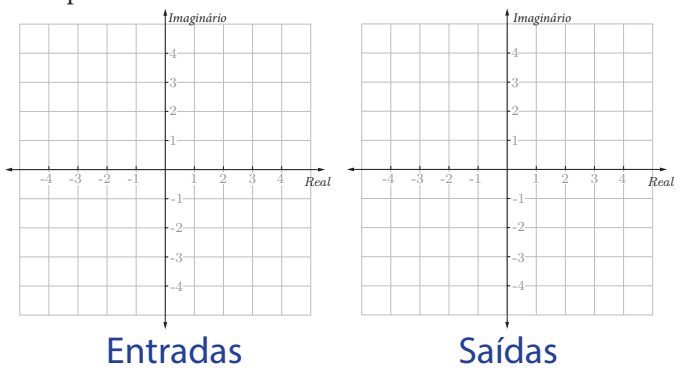


Figura 44 | Um conto de Dois Planos. Para acompanhar as entradas e saídas de uma função de variáveis complexas, precisamos de dois planos complexos.

Agora podemos experimentar nossa função: $f(z)=z^2+1$. Se inserirmos um número complexo em nossa função, por exemplo z é igual a $1 + i$, podemos fazer um pouco de álgebra e obter nosso resultado:

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (1+i)^2 + 1 \\ &= (1+i)(1+i) + 1 \\ &= 1 + i + i + i^2 + 1 \\ &= 1 + 2i - 1 + 1 \\ &= 1 + 2i \end{aligned}$$

Representando nossas entradas e saídas, vemos que o ponto $1+i$ em nosso plano de entrada z foi empurrado, ou mapeado, pela nossa função até $1+2i$ em nosso plano de saída w.

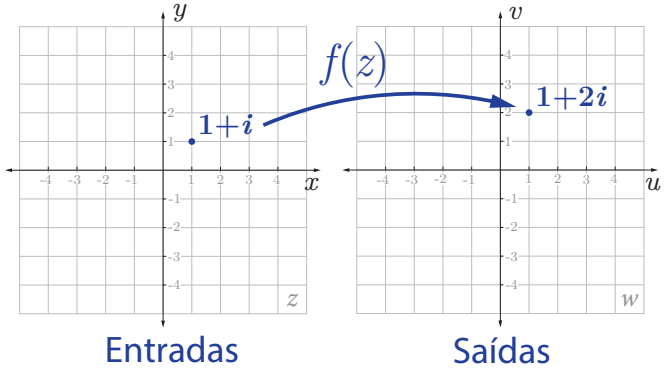
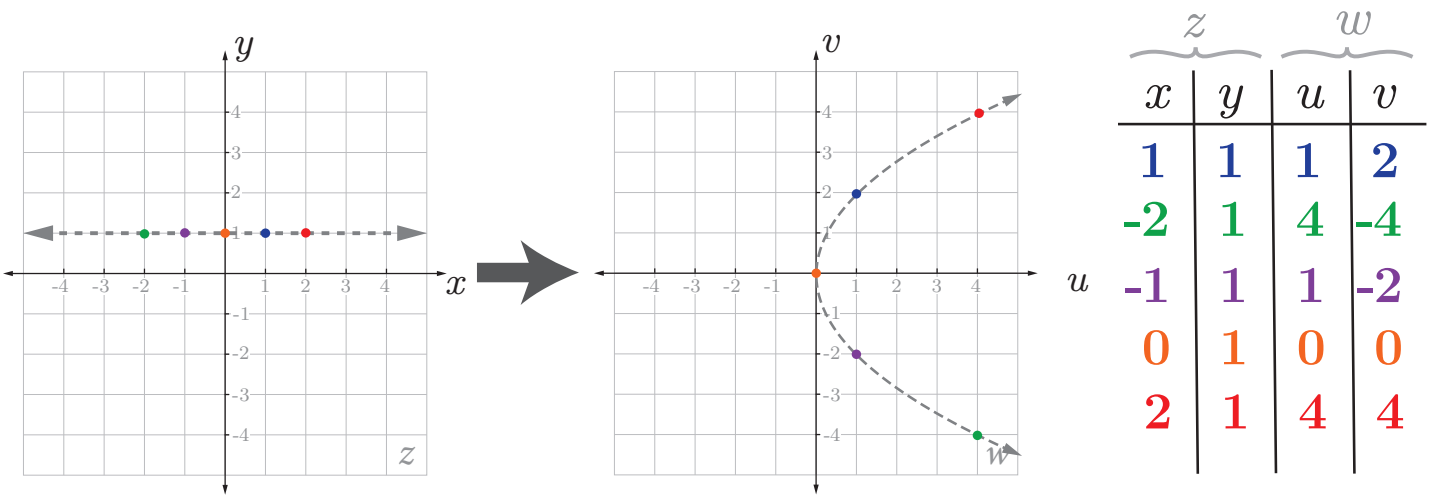


Figura 45 | Mapeando. Uma forma de visualizar nossa função, $f(z)=z^2+1$, é seguindo como os pontos individuais são mapeados do plano de entrada até a saída.

Vamos ligar mais alguns pontos para ver se conseguimos encontrar um padrão. Se testarmos pontos ao longo de uma linha reta em nosso espaço de entrada, veremos que em nosso espaço de saída, nossa linha reta é transformada em uma linha curva, como mostra a Figura 46.

Agora, como você pode imaginar, inserir pontos como esse pode ficar bem entediante. Para acelerar as coisas, vamos pedir que um computador faça isso por nós. E, em vez de mapear só alguns pontos, vamos mapear... todos os pontos.[4]

4 TODOS OS PONTOS!



z		w	
x	y	u	v
1	1	1	2
-2	1	4	-4
-1	1	1	-2
0	1	0	0
2	1	4	4

Figura 46 | Linhas Retas ficam Curvadas. Se mapearmos pontos ao redor de uma linha reta em nosso espaço de entrada, o resultado é uma linha curva em nosso espaço de saída!

Aproveitaremos o fato de que as imagens são apenas coleções de pixels que são organizados em uma grade. Usaremos algum código escrito na linguagem de programação python para mover cada pixel em uma imagem de entrada para seu local apropriado em uma imagem de saída.

Para fazer isso funcionar, atribuiremos a cada pixel em nosso vídeo de entrada um número complexo que corresponde à sua localização no plano complexo. Podemos então deixar nosso código cuidar do trabalho tedioso de mover cada pixel para sua nova localização, conforme ditado por nossa função, z^2+1.

Nosso código moverá pontos exatamente como fizemos manualmente antes, se tivermos um pixel azul no local $1+i$ em nosso gráfico de entrada, esse pixel azul será movido para o local $1+2i$ em nosso gráfico de saída, porque $f(1+i)$ é igual a $1+2i$.[1]

Vimos anteriormente que nossa função transformou uma linha horizontal reta em uma curva, por isso deveria ter alguns efeitos interessantes em nosso vídeo. Incluiremos alguns marcadores de referência sobre nossos planos de entrada e saída para acompanhar nossos números, mas não transformaremos esses pixels.

Ok, pronto?

Vamos começar desenhando algumas linhas simples em uma grade. Em nosso plano de saída, podemos ver que nossa família de linhas retas se transforma em uma família de linhas curvas. Legal, né?[2]

Então, encontramos um padrão, mas como esse padrão é explicado pela nossa função z^2+1? E, mais importante, como isso se encaixa em tudo o que aprendemos sobre os números complexos?

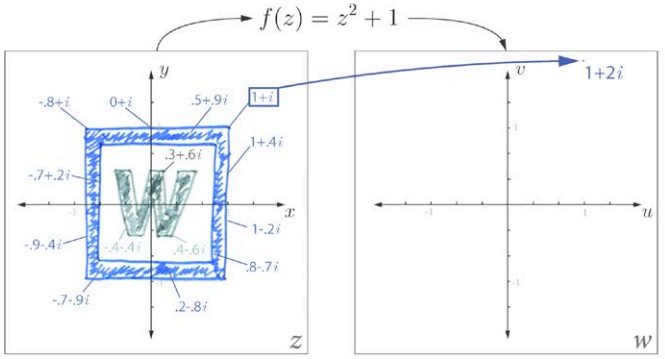


Figura 47 | Cada ponto recebe um número. Para mapear todos os pontos na imagem esquerda, atribuiremos a cada pixel um número complexo que corresponde à sua localização no plano complexo. Nosso código, então, cuidará do trabalho tedioso de mapear cada pixel até seu local apropriado no plano de saída.

O que mais seria interessante desenhar em nosso espaço de entrada para testar nosso mapeamento? Que formato você desenharia para saber mais sobre o que nossa função está fazendo?

1 Código Python disponível no github.

2 Observe que os ângulos entre nossas retas foram preservados! Isso significa que nosso mapeamento é conforme.

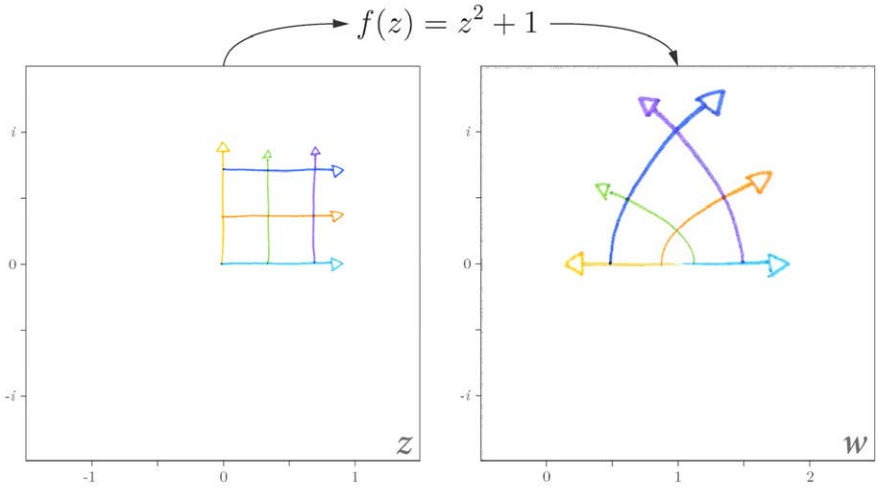


Figura 48 | Mapeando uma imagem inteira. Aqui, mapeamos todos os pontos do nosso plano z ao plano w.

Exercícios 10

Discussão

10.1 Por que o Sistema de Coordenadas Cartesianas é tão legal?

10.2 Por que as funções de variáveis complexas são tão difíceis de visualizar?

10.3 Qual é o número máximo de dimensões em que o Sistema de Coordenadas Cartesianas funcionará? Por quê?

10.4 Que forma você desenharia no plano esquerdo da Figura 48 para entender melhor o que sua função $f(z)=z^2+1$, está fazendo?

Broca

Seja $g(z)=z^2+2z$. Calcule:

10.4 $g(1)$

10.5 $g(i)$

10.6 $g(1+i)$

10.7 $g(1-i)$

Seja $h(z)=z^3+iz$. Calcule:

10.8 $h(1)$

10.9 $h(-i)$

10.10 $h(1-i)$

10.11 $h(2+2i)$

Pensamento Crítico

10.12 O Sistema de Coordenadas Cartesianas é tão comum hoje em dia que é fácil esquecer como é útil e não óbvio! Vamos considerar um exemplo.

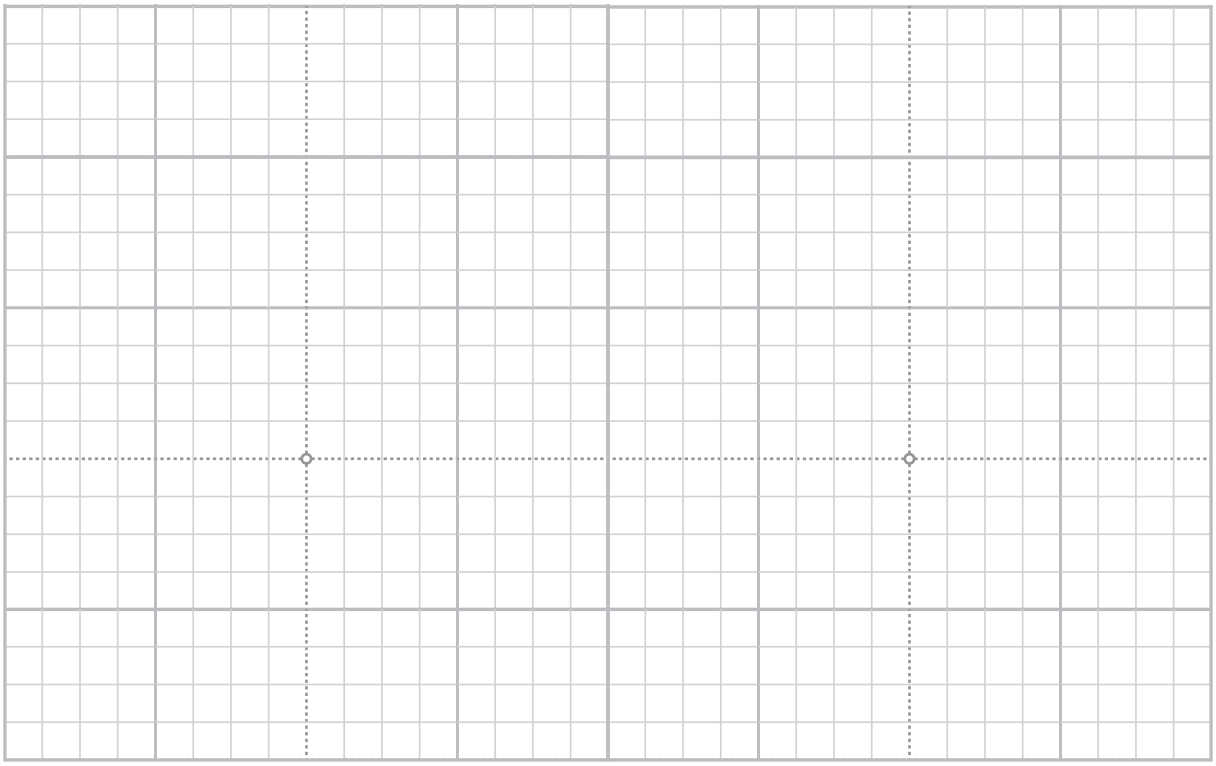
Você e seu amigo Gus estão planejando um assassinato em uma tranquila cidade litorânea. Você e Gus concordam em esconder o corpo em uma caverna localizada perto de Sunset Bay. No entanto, há um pequeno problema. A caverna só pode ser acessada na maré baixa. Sendo premeditadores, você e Gus planejam prever exatamente quando a maré baixa vai ocorrer, permitindo que programem o assassinato perfeito. Ao longo dos dias que antecederam o assassinato, Gus registra a profundidade da água em Sunset Bay a cada duas horas. Confira os dados de Gus ali ---------->

Hora (2 dias antes do assassinato	Profundidade da água (m)	Hora (Dia anterior ao assassinato	Water Depth (m)
12:00 AM	2,16	2:00 AM	Gus Fell Asleep
2:00 AM	1,95	4:00 AM	0.29
4:00 AM	1,35	6:00 AM	0.77
6:00 AM	0,59	8:00 AM	1.33
8:00 AM	0,30	10:00 AM	1.81
10:00 AM	0,20	12:00 PM	2.26
12:00 PM	0,77	2:00 PM	1.85
2:00 PM	1,34	4:00 PM	1.27
4:00 PM	1,89	6:00 PM	0.51
6:00 PM	2,07	8:00 PM	0.07
8:00 PM	1,96	10:00 PM	0.17
10:00 PM	1,43	12:00 PM	0.60
12:00 AM	0,66		

a) A manhã do assassinato chegou! Você e Gus se debruçam sobre o caderno dele, tentando encontrar o momento perfeito para cometer o ato e esconder o corpo. Com base apenas nos dados, (sem tirar fotos), quando você e Gus devem esconder o corpo?

b) Gus NÃO está satisfeito com sua resposta para o item a. Vamos usar o sistema de coordenadas cartesianas para convencer Gus. Usando a grade abaixo, trace a profundidade da água e a hora do dia.

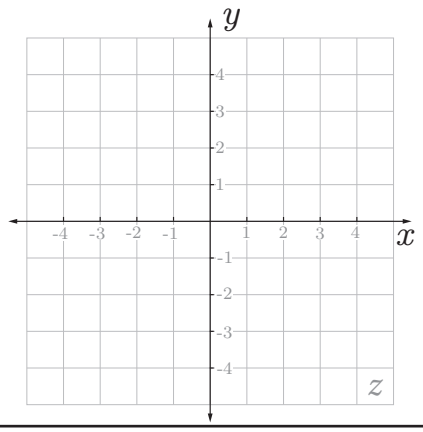
c) Com base na sua trama, quando você deve esconder o corpo? Sua resposta aos itens a e b coincidiram? Qual método é mais convincente? Quais são as vantagens do uso do Sistema de Coordenadas Cartesianas?

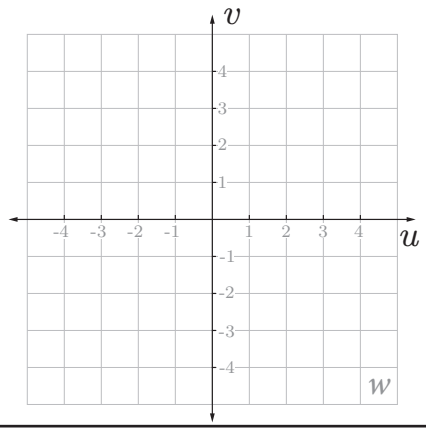


A Figura 46 mostra como uma reta foi transformada de reta para curva por nossa função $f(z)=z^2+1$. Nos exercícios abaixo, experimentaremos o mapeamento de outras formas. Para cada exercício, complete a tabela usando $f(z)=z^2+1$, plote os pontos de entrada e saída e especule amplamente sobre o que exatamente aconteceu com o formato da entrada.

10.13

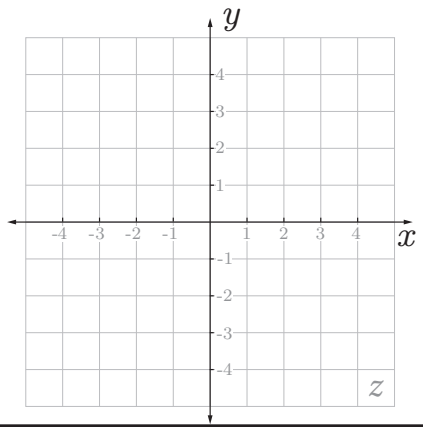
z		w	
x	y	u	v
-2	-1		
-1	-1		
0	-1		
1	-1		
2	-1		

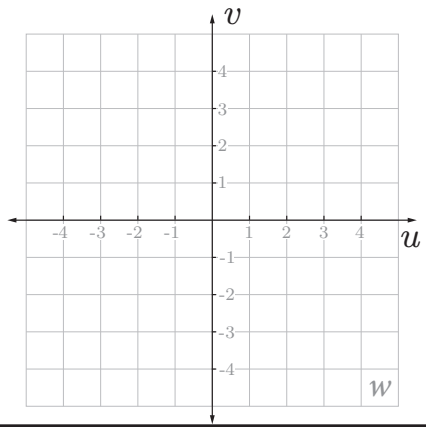




10.14

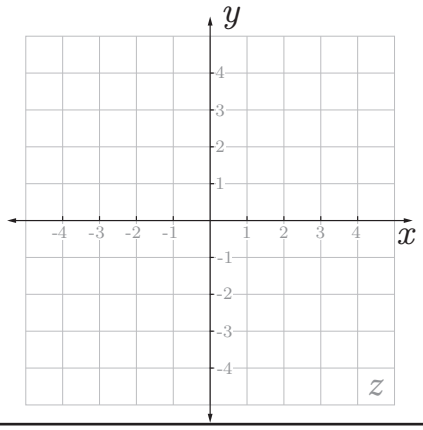
z		w	
x	y	u	v
1	-2		
1	-1		
1	0		
1	1		
1	2		

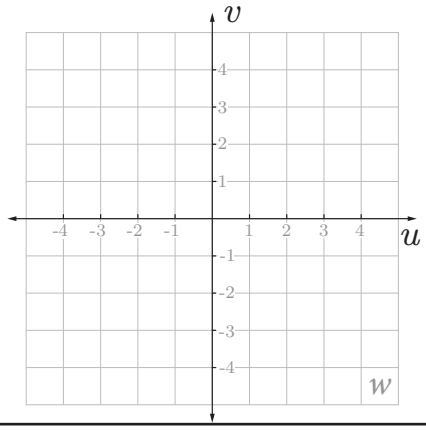




10.15

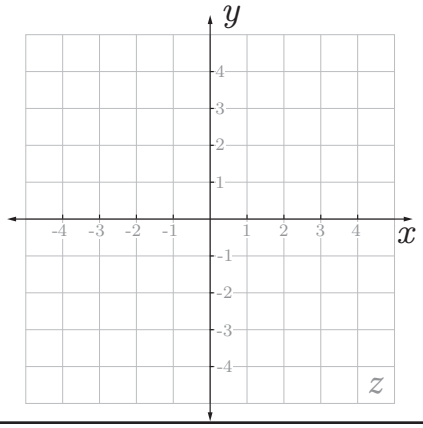
z		w	
x	y	u	v
-2	-2		
-1	-1		
0	0		
1	1		
2	2		

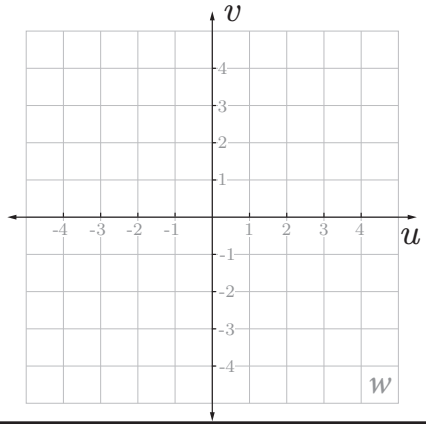




10.16 FAÇA SUA PRÓPRIA FORMA!

z		w	
x	y	u	v





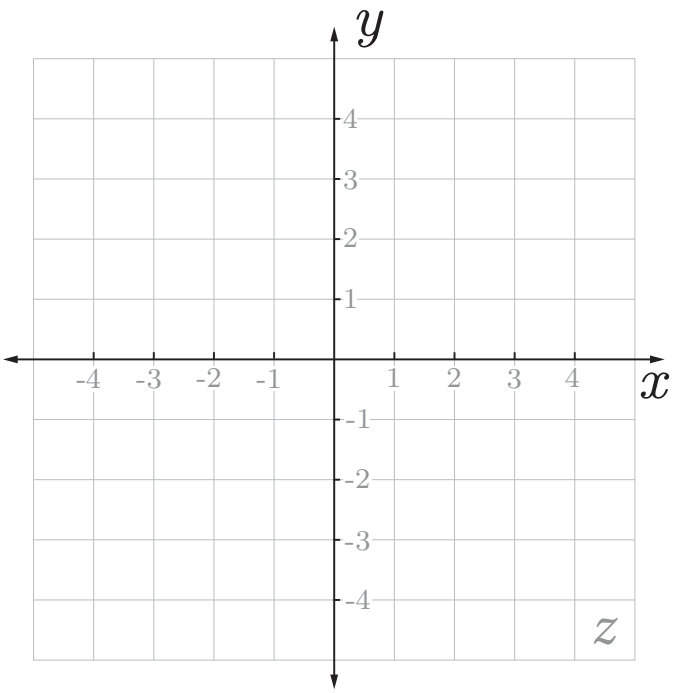
Desafio

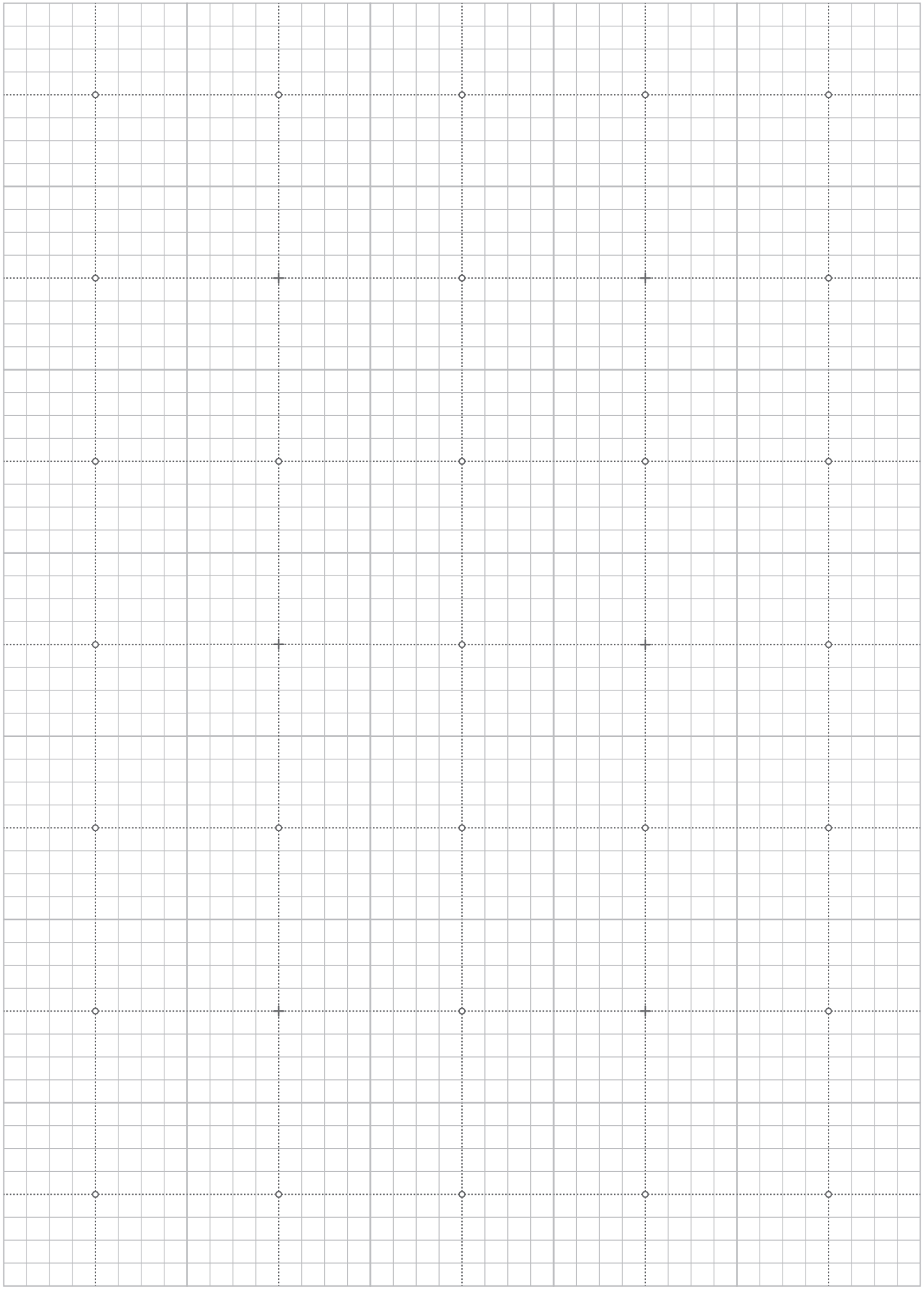
$$w = f(z) = z^2+1$$
$$z = x + iy \qquad (16)$$
$$w = u + iv$$

10.17 a) Usando a Equação 16, desenhe curvas/retas no plano z à direita onde $u = 0$.

b) Usando a Equação 16, desenhe curvas/retas no plano z à direita onde $v = 0$.

c) O que suas curvas dos itens a e b dizem sobre os zeros de f?





Números Imaginários são Reais

Parte 11: Vagando em Quatro Dimensões

Na última vez, paramos tentando pensar em que formas desenhar em nosso plano de entrada que nos ajudariam a entender melhor nossa função, $f(z)=z^2+1$.

Como z^2 significa multiplicar z por ele mesmo, e z é um número complexo, o comportamento de nossa função deve ter alguma conexão com a multiplicação complexa. Na parte sete, vimos que uma maneira de interpretar a multiplicação complexa é como uma rotação e escala de nossos valores de entrada, quando multiplicamos dois números complexos juntos, seus módulos se multiplicam e seus ângulos somam.

Então a parte z^2 de nossa função deve pegar nosso número complexo, z, elevar ao quadrado sua distância até a origem e dobrar seu ângulo. A parte mais um da nossa equação é menos interessante, adicionar um número *real positivo* moverá todos os nossos pontos na direção *real positiva*, portanto, à direita, neste caso por um. Já que essa mudança para a direita não afeta o comportamento que estamos interessados, deixaremos de fora de nossa equação por enquanto.

Vamos testar a ideia de que nossa função dobrará o ângulo de seus valores de entrada. Que tipo de forma devemos desenhar para testar essa ideia?

Idealmente, queremos desenhar uma forma composta por pontos todos no mesmo ângulo, para ver se nossa função altera todos os pontos do mesmo ângulo da mesma maneira.

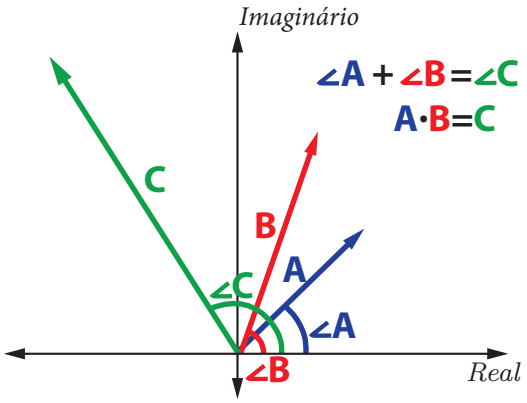


Figura 49 | Multiplicação Complexa. Quando multiplicamos dois números complexos, seus ângulos somam e as distâncias à origem se multiplicam.

Então, que tipo de forma é feita de pontos, todos no mesmo ângulo?

Isso acaba sendo uma linha reta que passa pela origem. Se traçarmos algumas linhas verdes pela origem, como mostrado no painel esquerdo da Figura 50, veremos que as saídas também são retas, com o que parece ser o dobro do ângulo!

Então, mostramos que nossa transformação dobra o ângulo de nossos valores de entrada. Agora, e quanto ao módulo de nossas entradas? Dissemos anteriormente que ao elevar ao quadrado um número complexo, o módulo também seria elevado ao quadrado. Portanto, a distância da origem dos nossos pontos de entrada deve ser quadrada em nosso mapeamento.[1]

1 Só não esqueça que números<1 ficam menores quando elevados ao quadrado!

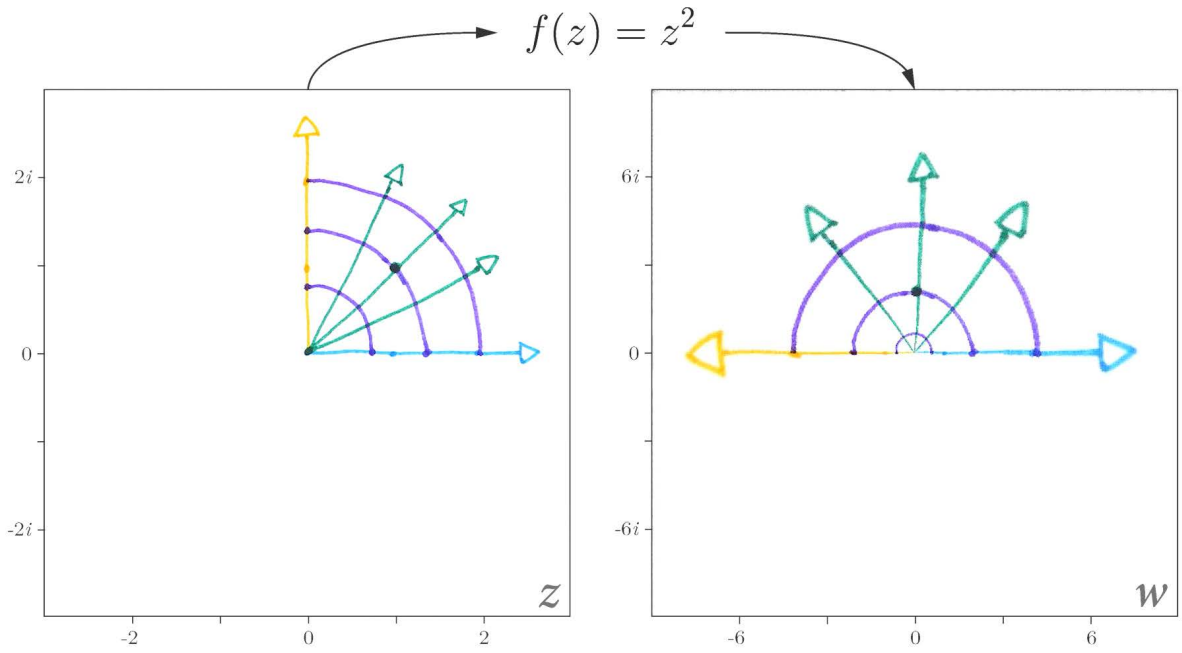


Figura 50 | Mapeando Pixels de Acordo com a Função $f(z)=z^2+1$. Escolhendo cuidadosamente as formas que desenhamos em z, podemos aprender mais sobre nossa função complexa. Aqui vemos que os quartos de um círculo são mapeados para meios círculos com raios diferentes, e as retas que passam pela origem são mapeadas para outras retas que passam pela origem com ângulos maiores.

Que tipo de forma devemos desenhar para testar essa ideia? Queremos testar somente o módulo, então seria bom ter uma forma com um módulo constante. Que tipo de forma módulo ou distância da origem em todos os lugares?

Essa forma que precisamos agora é exatamente um círculo! Se adicionarmos seções de alguns círculos à nossa imagem, como mostra a Figura 50, veremos que elas resultam em novas seções de círculo, mas agora a diferentes distâncias da origem. Então, como esperávamos, nossos círculos são preservados, mas seus raios são alterados.

Então agora estamos realmente chegando a algum lugar, escolhendo cuidadosamente nosso formato de entrada, pudemos entender melhor exatamente o que nossa função faz para números complexos.

Maravilha.

Mas antes de celebrarmos, tenhamos em mente algumas coisas. Por um lado, estamos lidando com uma função realmente simples. E em segundo lugar, mesmo para esta função simples, ainda podemos ter problemas com nossa configuração de dois planos complexos.

Por exemplo, sabemos que nosso mapeamento duplica o ângulo dos pontos de entrada. Isso é bom, até que usemos muito do nosso espaço de entrada. Se continuarmos os círculos que começamos anteriormente, quando chegarmos a 180 graus[1], começaremos a ver um problema.

Nossas formas foram expandidas para preencher todo o espaço de saída, mas usamos apenas metade do espaço de entrada!

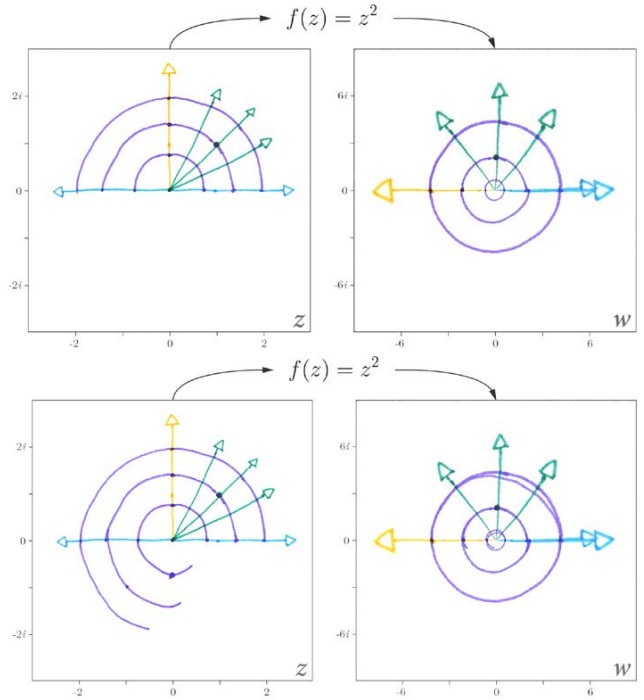


Figura 51 | Sem Espaço! Se continuarmos nossos círculos no plano *z*, nossos círculos mapeados não terão para onde ir em *w*, exceto diretamente sobre nossos outros pontos.

1 Ou seja, pi.

À medida que continuamos nossos círculos, nossos novos pontos não têm para onde ir, exceto diretamente em cima dos nossos pontos antigos. Isso faz sentido algebricamente, por causa da maneira como o quadrado funciona, pontos como $1+i$ e $-1-i$ serão mapeados exatamente para o mesmo valor de saída:

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (1+i)^2 \\ &= (1+i)(1+i) \\ &= 1 + i + i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1-i) &= (-1-i)^2 \\ &= (-1-i)(-1-i) \\ &= 1 + i + i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i \end{aligned}$$

Portanto, não é que nossa função esteja quebrada ou algo assim, é apenas que a técnica que estamos usando para visualizá-la não consegue lidar com vários valores mapeados para o mesmo local no plano de saída, afinal, qual pixel devemos exibir, aquele que está no $1+i$, ou o que está no $-1-i$?

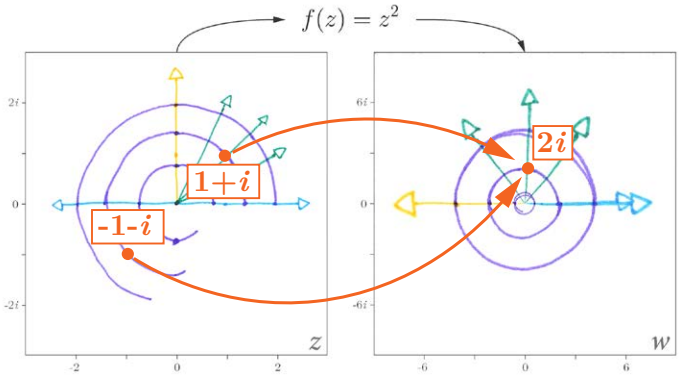


Figura 52 | Problema em Dobro. Dois pontos de entrada são mapeados para um único ponto de saída, o que significa que a parte inferior esquerda do nosso círculo termina diretamente na parte superior esquerda. Não é legal.

Mapeamentos como esse criam problemas na matemática, embora tipicamente na direção inversa. A inversa de uma função é onde as entradas se tornam saídas e as saídas se tornam entradas. A inversa de nossa função é bastante simples de encontrar, precisamos simplesmente resolver nossa equação para *z*:[2]

$$z = \pm\sqrt{w} \qquad (17)$$

2 Observe que estamos adicionando o sinal de mais ou menos aqui para fins de clareza, alguns recursos o omitem e calculam raiz (z) = +/- raiz(z), e alguns usam a potência 1/2 como alternativa para representar partes específicas da função.

Agora, nos deparamos com o verdadeiro problema.

Nossa função inversa representa exatamente as mesmas conexões que nossa função direta, só que na direção oposta. Portanto, nossas duas entradas mapeadas para a mesma saída agora são uma única entrada que mapeia para duas saídas. O valor w de $2i$ é mapeado tanto para z=1+i quanto para z=-1-i. Esse mapeamento de uma única entrada para várias saídas é um problema grande o suficiente para que a inversa de nossa função nem sequer seja tecnicamente considerada uma função, a definição de uma função exige que cada entrada seja mapeada para uma única saída.

Para tornar as coisas agradáveis e confusas, não funções assim são chamadas de multifunções. Portanto, nosso mapeamento é o mesmo em qualquer direção, mas tomado de z para w é considerado uma função, enquanto que de w para z é considerado uma multifunção.

Vamos experimentar nossa multifunção. Quando desenhamos formas em nosso plano w, nossas formas são duplicadas e encolhidas no nosso plano z:

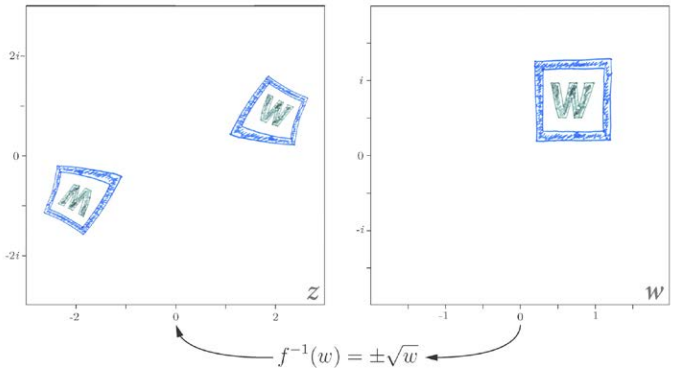


Figura 54 | Problema em Dobro de Verdade. Quando desenhamos em nosso plano w e mapeamos nossos pixels para nosso plano z, terminamos com 2 cópias de nosso desenho!

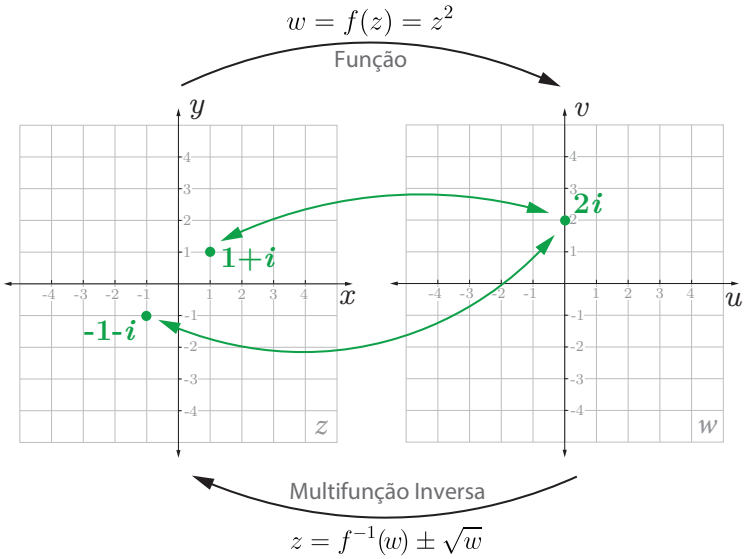


Figura 53 | Nossa Função e Sua Inversa. Podemos pensar em nosso mapeamento de duas maneiras, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda.

Nossas formas são copiadas porque cada ponto em w é mapeado para dois pontos em z e reduzidas porque a função raiz quadrada calcula a raiz quadrada do módulo de nossos valores de w e divide cada ângulo por 2.

Vamos experimentar com mais um tipo de forma, um caminho. Vamos escolher um ponto de partida no nosso plano w, passear um pouco e voltar para onde começamos. Seguindo os caminhos nos planos w e z, podemos ter uma ideia do que acontece quando vagamos pelo espaço quadridimensional de nossa multifunção complexa .

Nosso caminho azul nos leva de volta ao ponto em que começamos no plano z e no w. Nenhuma surpresa aqui. Mas se mudarmos um pouco o nosso caminho, algo estranho acontece.

Ao longo de nosso caminho verde, nosso caminho w retorna para onde começamos, mas nossos caminhos z... não.

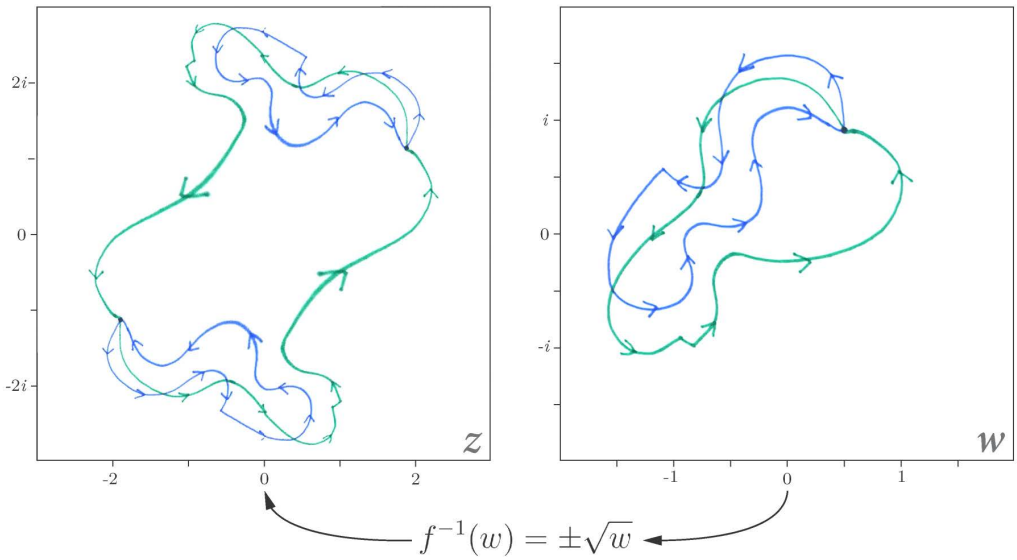


Figura 55 | Que diabos? Nosso caminho azul acaba exatamente onde começou ... mas nosso caminho verde pula! O que esta acontecendo aqui?

De alguma forma, nossos valores z saltaram para uma parte totalmente nova do plano! De alguma forma, caminhamos para uma parte completamente nova de nossa multifunção.

Parece que alguns caminhos em w nos levam de volta para onde começamos, mas outros não. O que poderia estar acontecendo aqui? Como o cenário complexo de nossa multifunção pode percorrer caminhos semelhantes em direções tão diferentes?

Uma das razões pelas quais gosto de matemática é que, para muitos problemas, alguém muito mais esperto do que eu já pensou bastante sobre eles e muitas vezes encontrou uma solução elegante.

Nesse caso, essa pessoa era um dos alunos de Gauss, *Bernhard Riemann*. Vamos discutir a solução dele no próximo encontro.

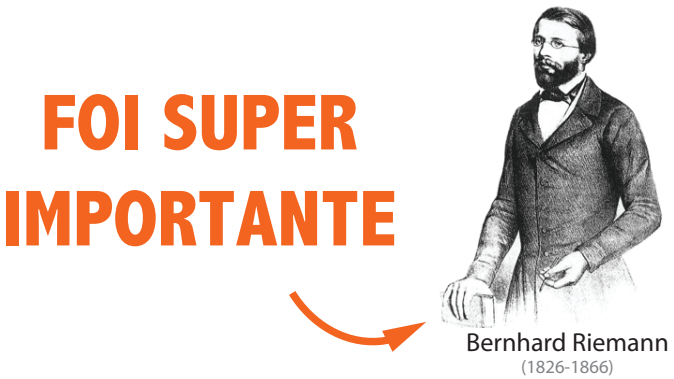


Figura 56 | Bernhard Riemann. O trabalho de Berhnard Riemann continua a ter um enorme impacto na matemática moderna. Uma de suas ideias sobre números primos, conhecida hoje como Hipótese de Riemann, permanece sem solução e é tão importante para a matemática que uma solução correta lhe renderá 1 milhão de dólares do Clay Mathematics Institute.

1 Mas certamente não TODOS os problemas.

Exercícios 11

Discussão

11.1 Por que escolhemos desenhar círculos e linhas que passam pela origem na Figura 50?

11.2 Na Figura 51, encontramos um problema. Vários pontos do nosso plano z são mapeados para o mesmo local no nosso plano w. Por que isso acontece?

11.3 Na Figura 54, por que terminamos com 2 cópias das formas que desenhamos no plano w?

11.4 Por que você acha que nossos caminhos se comportam de maneira tão estranha na Figura 55?

Broca

Usando a forma polar dos números complexos que aprendemos nas Partes 7 e 8, encontre todas as soluções para a multifunção:

$$z = f^{-1}(w) \pm \sqrt{w}$$

11.5 $f^{-1}(-2i)$

11.6 $f^{-1}(-1)$

11.7 $f^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

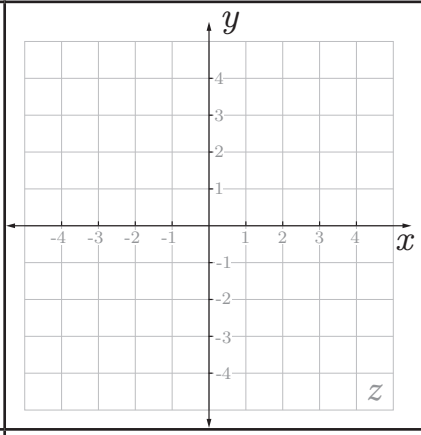
11.8 $f^{-1}(0)$

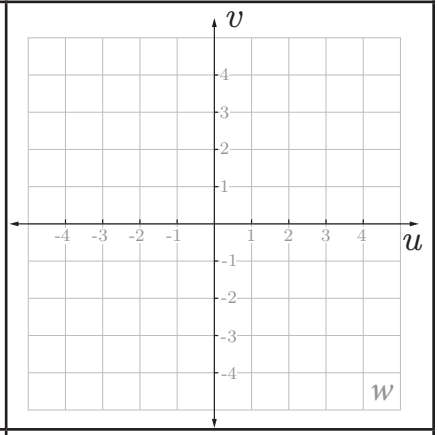
Pensamento Crítico

É a sua vez de experimentar alguns caminhos! Em cada exercício abaixo, calcule os valores de x e y para cada ponto de acordo com a função $z = \pm\sqrt{w}$, plote os pontos de entrada e saída e conecte pontos consecutivos com uma reta. Você pode usar tecnologia.

11.9

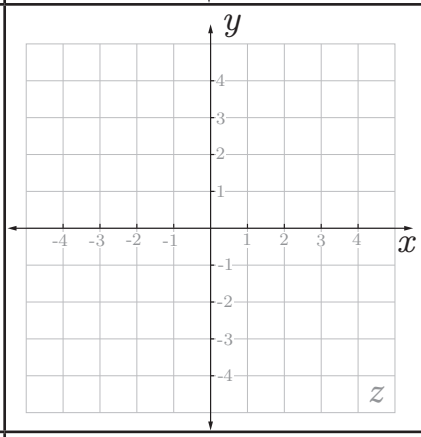
z_1		z_2		w	
x_1	y_1	x_2	y_2	u	v
				4	0
				0	2
				0	4
				2	$2\sqrt{3}$
				4	0

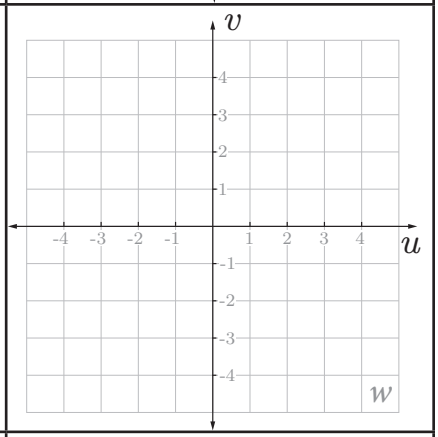




11.10

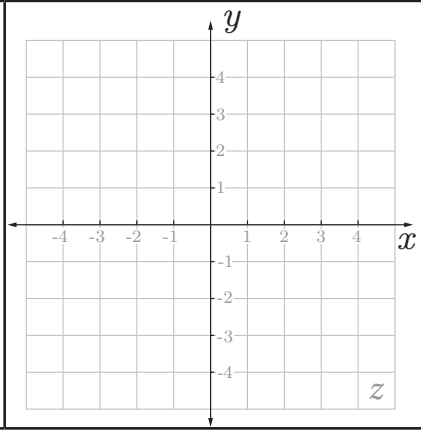
z_1		z_2		w	
x_1	y_1	x_2	y_2	u	v
				4	0
				0	2
				-4	0
				0	-2
				4	0

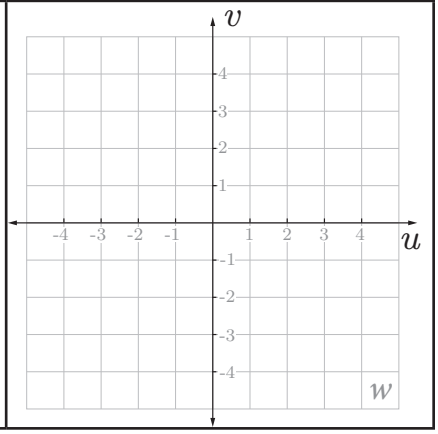




11.11 FAÇA SEU PRÓPRIO CAMINHO!

z_1		z_2		w	
x_1	y_1	x_2	y_2	u	v





Desafio

11.12 Explique por que nossos caminhos pulam na Figura 55.

Números Imaginários são Reais

Parte 12: A Solução de Riemann

Da última vez, paramos nos perguntando por que alguns caminhos no plano w nos levam para valores completamente diferentes no plano z, e outros não.

O aluno de Gauss, Bernhard Riemann, teve algumas ideias poderosas sobre problemas como esse em meados do século XIX.

A primeira parte da contribuição de Riemann é a ideia de que, para funções como essa, precisamos de mais de dois planos complexos para visualizar nossa função. Como cada ponto em nosso plano w mapeia dois pontos em nosso plano z, podemos começar a resolver nossa ambiguidade adicionando um segundo plano w e deixando cada um de nossos dois pontos em z mapear sua própria copia do plano w.

Tudo bem, mas imediatamente levanta uma questão importante: como escolhemos quais valores de z mapear em cada plano? Uma abordagem simples e eficaz aqui é simplesmente dividir o plano z em duas partes, vamos chamar a parte direita do mapa o nosso primeiro plano w e a outra metade do mapa esquerda como o segundo plano w.[1] Essas versões restritas da nossa multifunção são chamadas de ramos.

Vamos traçar um caminho novamente, mas agora só com o primeiro plano w. As coisas parecem boas até cruzarmos o eixo real negativo e nosso caminho no plano z de repente pula!

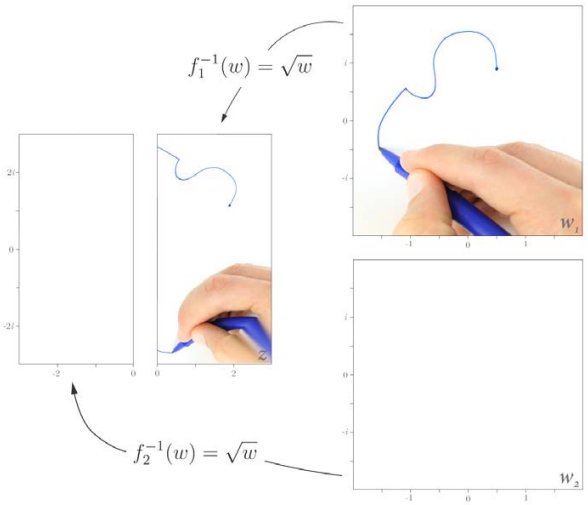


Figura 58 | Porcaria! Como decidimos mapear nosso primeiro plano *w* ao lado direito do nosso plano z, quando cruzamos o eixo real negativo em w, nosso caminho em z salta repentinamente!

É claro que é isso que deve acontecer, exigimos que os pontos do nosso primeiro plano w mapeiem apenas o lado direito do nosso plano z. Quase todo ponto[2] em w tem duas soluções possíveis em z, e com nossa primeira ramificação, decidimos sempre escolher a que está à direita.

1 São chamados ramos! Fizemos um "corte de ramo"

2 Quais pontos em w não mapeiam dois pontos em z?

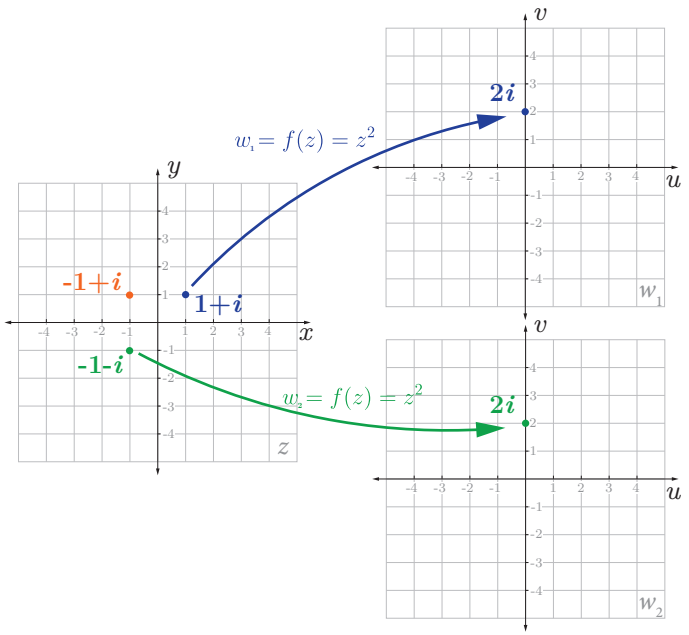


Figura 57 | Ideia de Riemann, Parte 1. A primeira parte da ideia de Riemann é permitir que cada uma de nossas duas soluções em *z* mapeie sua própria cópia do plano *w*. Isso levanta um problema, em qual plano mapeamos outros pontos, como -1+*i*?

Portanto, nosso caminho agora salta no plano z, mas o que talvez seja mais decepcionante aqui é que não obtivemos nenhuma percepção do comportamento interessante do loop que vimos da última vez; na verdade, não podemos nem recriá-lo com essa configuração, independentemente do tipo de loop que desenhamos, como mostra a Figura 59, sempre terminamos exatamente onde começamos no plano z e no plano w, parece que legalizamos esse comportamento inexistente.

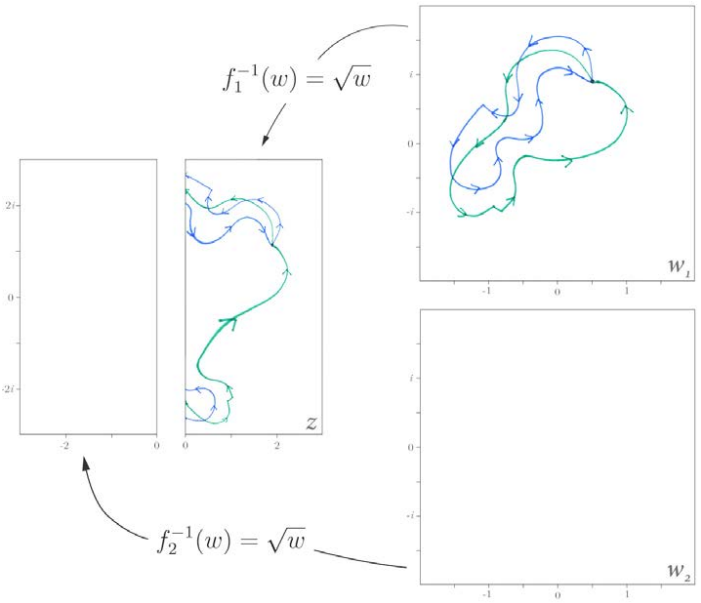


Figura 59 | O Que Aconteceu? Ao dividir nossa função dessa maneira, não vemos mais o comportamento do loop legal da Figura 55. Que droga.

Além disso, o fato de nossa função saltar através do plano z significa que nossos ramos são descontínuos, um enorme problema matemático. As funções de variáveis complexas são uma grande parte da matemática e da ciência moderna, e se nossas funções estiverem funcionando dessa maneira, não podemos fazer coisas importantes, como obter derivadas e integrais.[1]

Então, resolvemos o problema da multifunção dividindo ela em ramificações, nossa função agora é um para um[2], mas, no processo, introduzimos alguns problemas sérios, até agora, a solução da Riemann não parece tão boa.

Felizmente, essa foi apenas a primeira parte e a segunda parte é muito mais interessante.

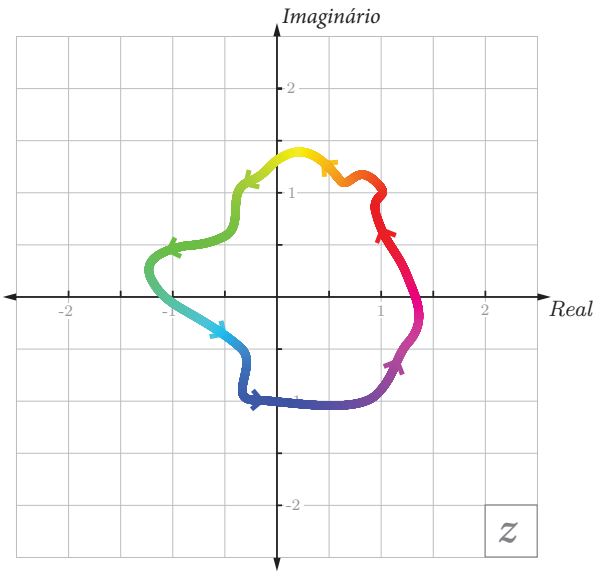
Vamos considerar nosso problema de descontinuidade com mais detalhes. Voltaremos momentaneamente para nossa função de avanço e desenharemos novamente em nosso plano z.

1 Na linguagem do cálculo ou análise real, diferenciável. Ou em análise complexa, holomórficas ou analíticas.

2 Cada entrada possui exatamente uma única saída.

Figura 60 | Faça a Sua Própria Superfície de Riemann!

O grande matemático Bernhard Riemann viu uma maneira de reunir nossos dois planos w de tal maneira que nosso caminho colorido se tornasse contínuo. Seu trabalho é recriar a ideia de Riemann cortando os dois planos w à direita e posicionando/cortando/colando-os de uma forma que tornará nossa curva contínua. Para isso, basta fazer um único corte em cada plano. Se você conseguir, terá criado uma peça de matemática verdadeiramente bonita e o tópico da próxima seção: **Uma Superfície de Riemann.**



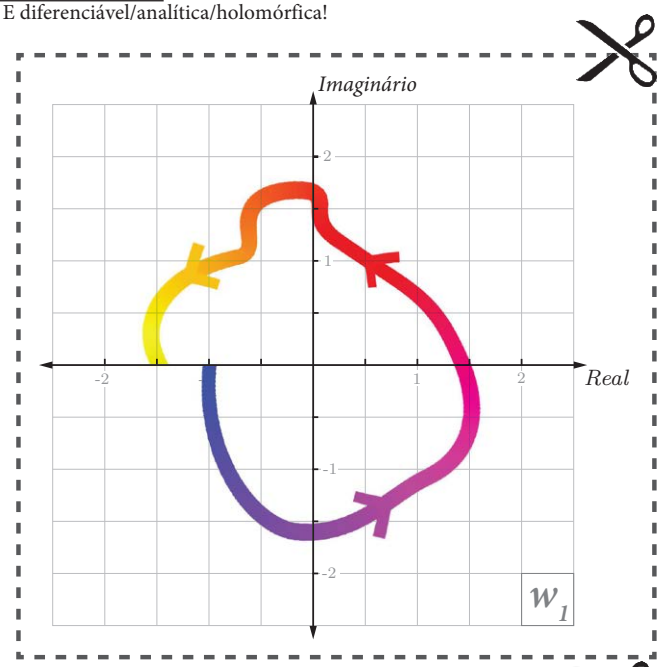
Vamos prestar muita atenção para onde nossas descontinuidades aparecem. Seguiremos os pontos ao longo de um único caminho e, para garantir que possamos diferenciar os pontos de nosso caminho, mudaremos continuamente sua cor.

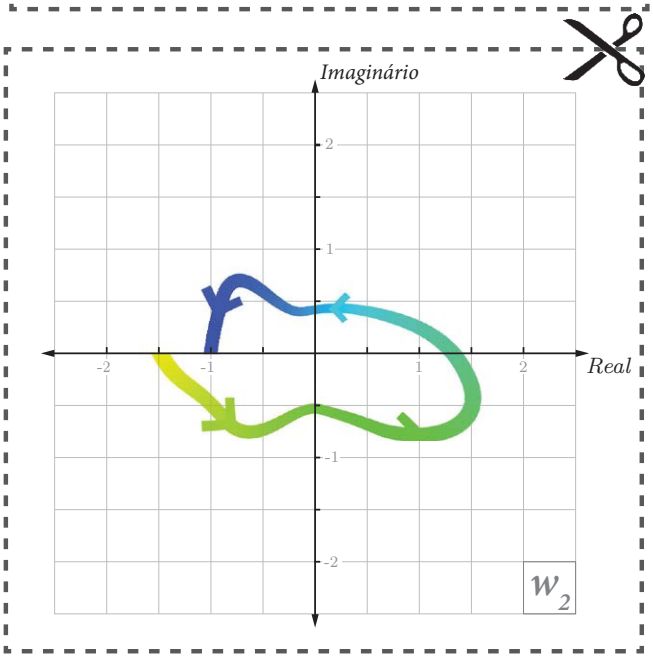
À medida que passamos do primeiro para o segundo quadrante em z na Figura 60, mudamos de ramo. Voltamos para nosso primeiro ramo quando nos movemos do terceiro para o quarto quadrantes. Para nossa função ser contínua, precisamos conectar de alguma forma nossos dois planos w nos pontos exatos onde nosso caminho salta.

O que Riemann viu aqui foi uma maneira de reunir nossos dois planos complexos de tal maneira que nossa multifunção seria perfeitamente contínua[3], mantendo as boas propriedades individuais de nossa solução de dois planos w.

Para ver a solução da Riemann, pegue uma tesoura e fita adesiva e verifique as instruções abaixo.

3 E diferenciável/analítica/holomórfica!





Exercícios 12

Discussão

12.1 O que há de bom na solução dos Dois Planos Complexos de Riemann?

12.2 O que não há de tão bom na solução dos Dois Planos Complexos de Riemann?

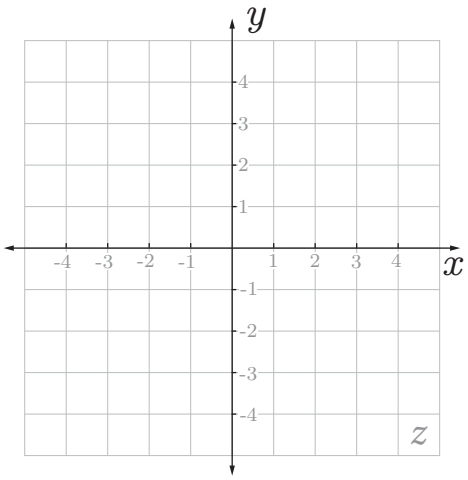
12.3 Por que nossos caminhos saltam nas Figuras 58 e 59?

Broca

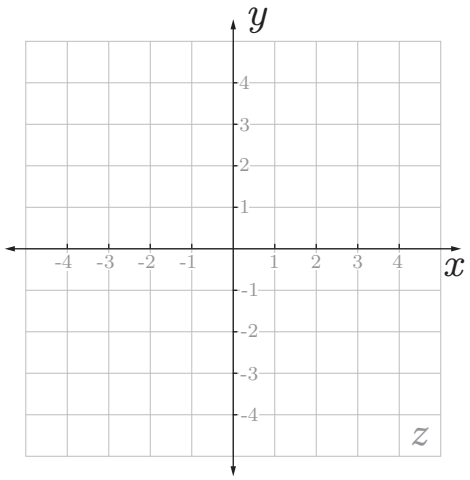
Encontre todas as soluções gráficas da multifunção

$$z = f^{-1}(w) \pm \sqrt{w}$$

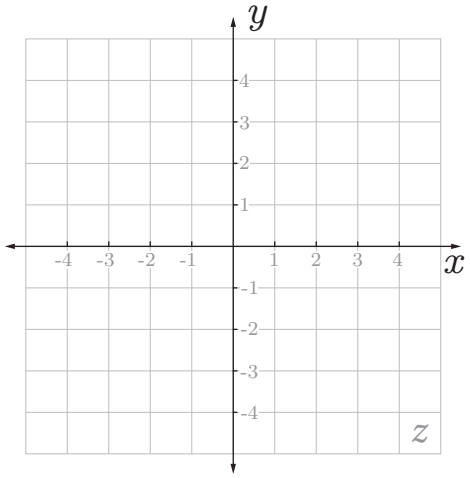
12.4 $f^{-1}(4)$



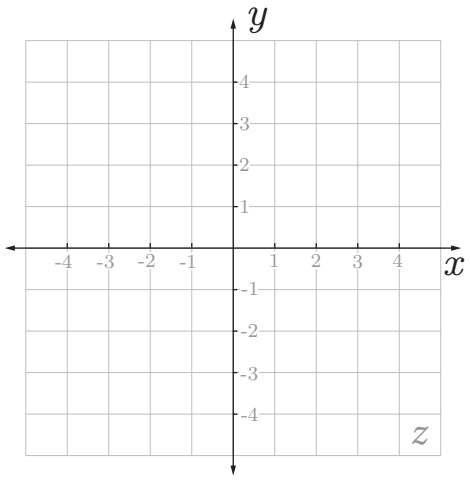
12.5 $f^{-1}(2i)$



12.6 $f^{-1}(-4)$



12.7 $f^{-1}(-2i)$

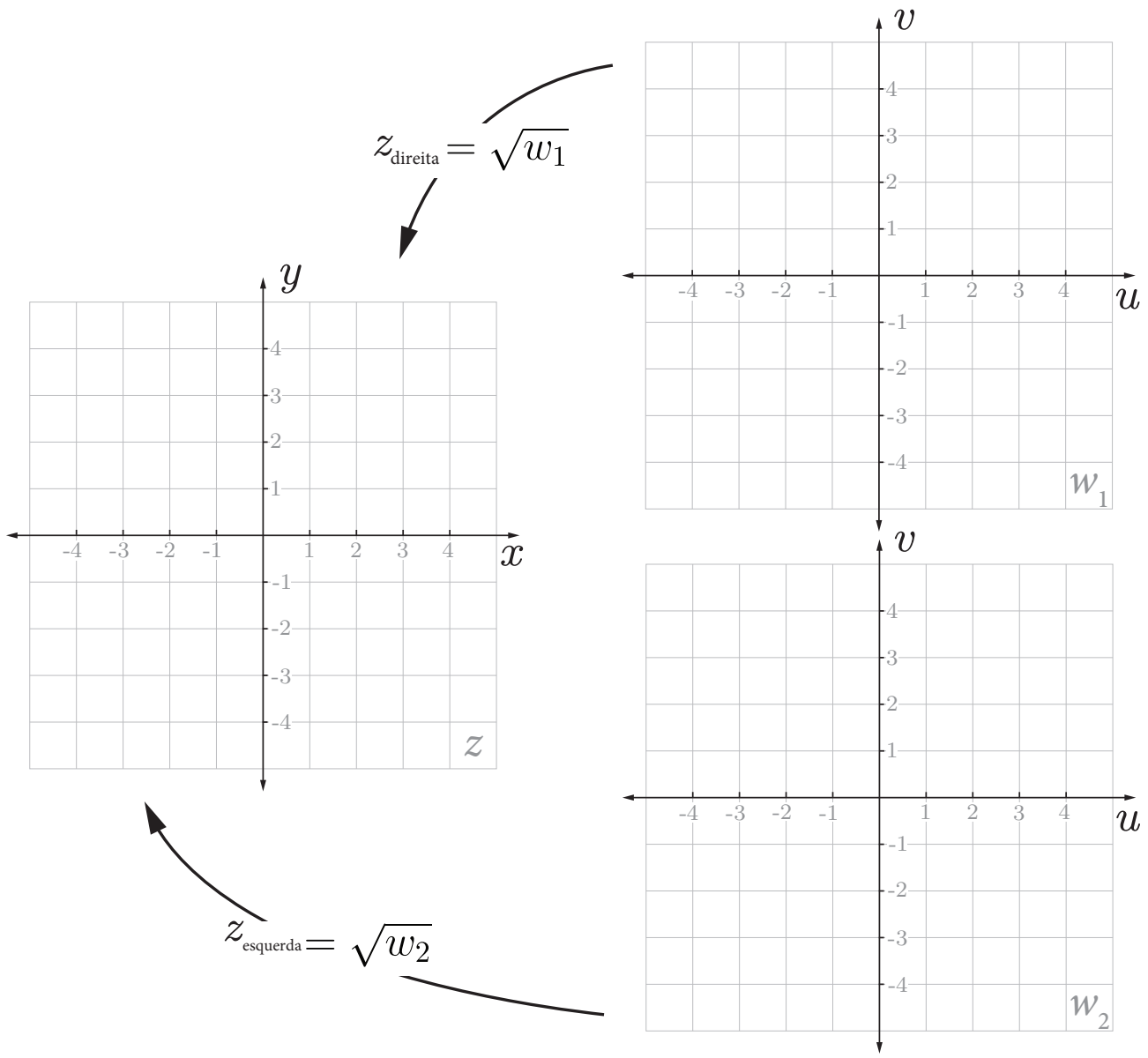


Pensamento Crítico

12.8 Vamos tentar entender melhor o que está acontecendo na Figura 58. Para cada valor w nas tabelas abaixo, calcule os valores z correspondentes. Cada valor w produzirá dois valores z; portanto, escolha o apropriado com base em qual lado do plano (esquerda ou direita) ele está. Plote todos os pontos e conecte pontos consecutivos para formar um caminho, quando possível. Para pontos que acabam no eixo imaginário *z (y)* (eles podem ser interpretados como lado esquerdo ou direito), mantenha as duas soluções. Para um ponto interessante, pinte os caminhos esquerdo e direito de cores diferentes.

$z_{esquerda}$		w_2	
$x_{esquerda}$	$y_{esquerda}$	u	v
		4	0
		0	2
		0	4
		2	$2\sqrt{3}$
		4	0

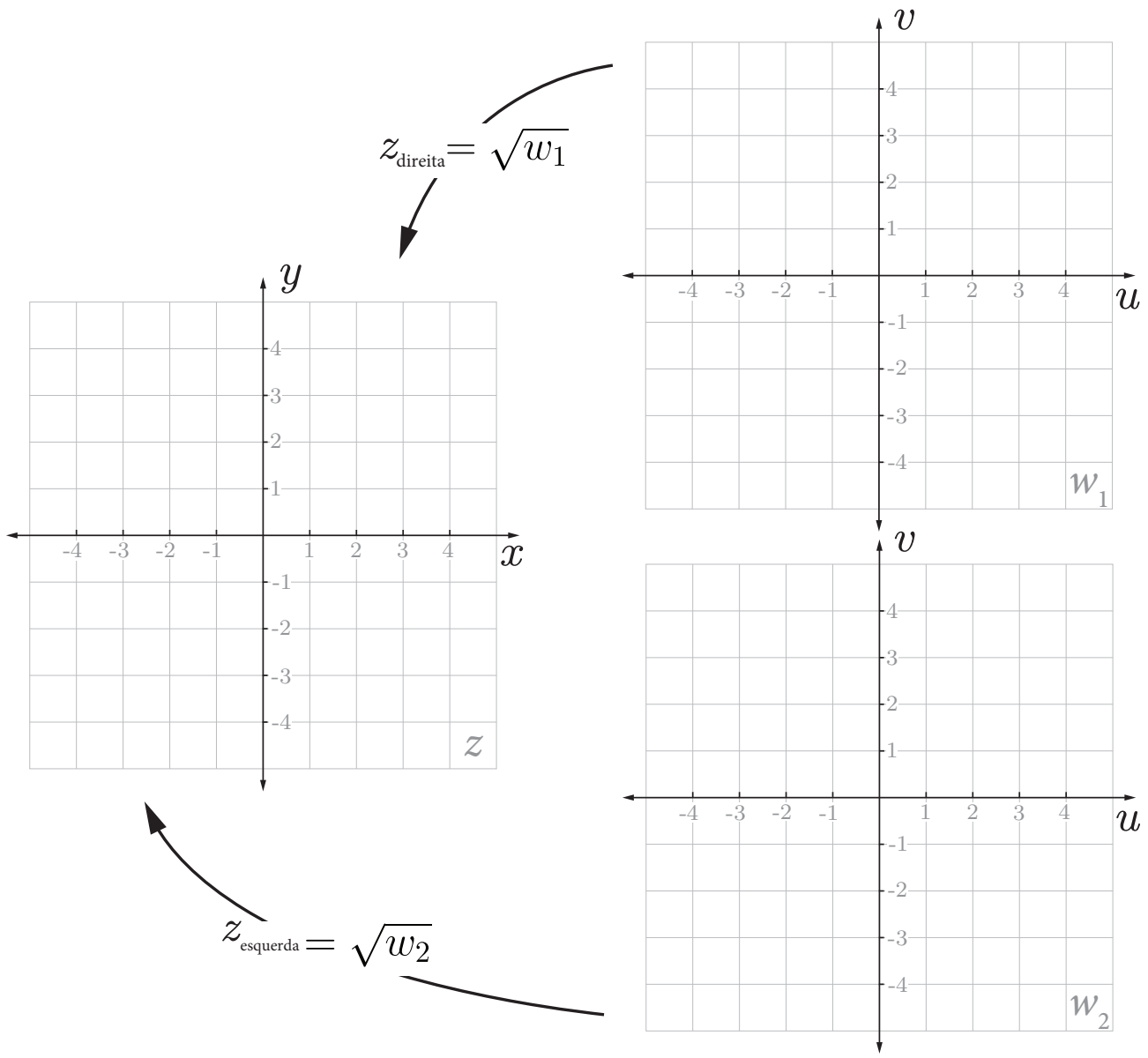
$z_{direita}$		w_1	
$x_{direita}$	$y_{direita}$	u	v
		4	0
		0	2
		0	4
		2	$2\sqrt{3}$
		4	0



12.9 Para cada valor de *w* nas tabelas abaixo, calcule os valores de *z* correspondentes. Cada valor de *w* produzirá dois valores de *z*; portanto, escolha o apropriado com base em qual lado do plano (esquerda ou direita) ele está. Plote todos os pontos e conecte pontos consecutivos para formar um caminho, quando possível. Para pontos que acabam no eixo imaginário *z (y)* (eles podem ser interpretados como lado esquerdo ou direito), mantenha as duas soluções. Para outro ponto interessante, pinte os caminhos esquerdo e direito de cores diferentes.

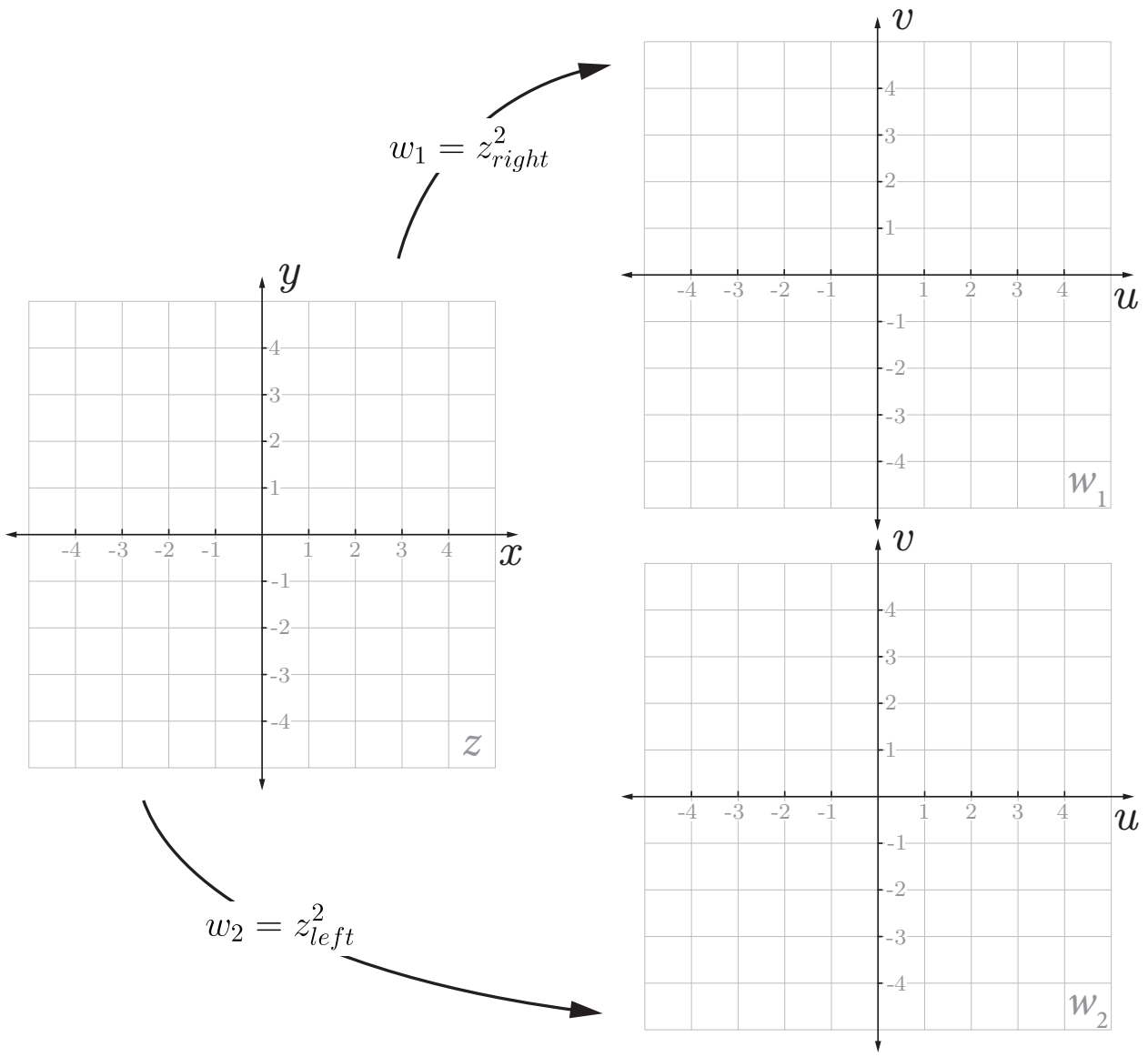
$z_{esquerda}$		w_2	
$x_{esquerda}$	$y_{esquerda}$	u	v
		4	0
		0	2
		-4	0
		0	-2
		4	0

$z_{direita}$		w_1	
$x_{direita}$	$y_{direita}$	u	v
		4	0
		0	2
		-4	0
		0	-2
		4	0



12.10 Em frente! Mapeie cada valor z na tabela abaixo ao seu valor w correspondente. Note que cada z mapeará a ambos w_1 ou w_2, com uma exceção: permitimos que pontos sobre o eixo imaginário $z\,(y)$ mapeie ambos w_1 *e* w_2: este é um pequeno hack (não conte aos seus amigos matemáticos) para fazer com que seu gráfico seja mais fácil de entender. Plote todos os pontos e conecte os pontos consecutivos para formar um caminho quando possível.

z		w_1		w_2	
x	y	u	v	u	v
2	0				
1	2				
0	2				
-2	1				
-2	0				
-1	-2				
0	-1				
1	-1				
2	0				



Desafio

12.11 Na Figura 58, nossa primeira descontinuidade em z ocorre quando cruzamos o eixo real negativo em w. Por que isso acontece nesse local em específico? É um resultado de como nossa função se comporta ou uma escolha que fizemos?

Números Imaginários são Reais

Parte 13: Superfícieis de Riemann

Esta é uma superfície de Riemann.
Isso vai nos ajudar a pensar em quatro dimensões.
Criamos ela cortando nossos planos nas descontinuidades em nossos caminhos e os unindo de uma maneira que fez com que nossos caminhos de um plano para o outro fossem contínuos.
O grande insight de Riemann aqui foi que o domínio, os valores de entrada de nossa multifunção, não deve ser um plano bidimensional plano. Nosso domínio deveria ser este: uma superfície curva[1] vivendo em um espaço dimensional superior. Uma superfície de Riemann.
O que é incrível aqui é o que a geometria[2] de nossa superfície de Riemann vai nos permitir fazer. Usando nossa superfície de Riemann como o espaço de entrada de nossa multifunção, podemos corrigir literalmente todos os problemas que encontramos até agora: nossa função será um para um, contínua, e a superfície de Riemann vai até nos ajudar a explicar elegantemente o estranho comportamento do loop que vimos na parte onze.
Vejamos como. Riemann imaginou essas superfícies como folhas cobrindo o plano de entrada, w.[3] Nossa superfície de Riemann é construída a partir de duas cópias do plano complexo, e a ideia aqui é que cada valor de entrada em w está diretamente abaixo de seus pontos correspondentes em cada camada de nossa superfície de Riemann.
Se seguirmos uma linha reta para cima a partir do valor $2i$ em nosso plano w, encontraremos dois pontos que correspondem a w igual a $2i$. Nossa superfície de Riemann corrige nosso problema um para um da mesma forma que nossa solução do plano complexo-2 (de 2 dimensões) fez: cada uma de nossas duas soluções em z corresponde à sua própria cópia do plano w, estes são chamados de ramos.
Portanto, nossa superfície de Riemann torna nosso mapeamento um para um, assim como nossa abordagem do plano complexo-2 fez da última vez, mas e a continuidade? Como vimos da última vez, o grande problema com a nossa solução do plano complexo-2 é que ele introduziu descontinuidades.
Construímos nossa superfície de forma que nosso caminho colorido fosse contínuo, mas encontramos uma estranha auto interseção ao longo do eixo real negativo: nossos planos têm que passar um pelo outro. Vamos nos aprofundar. Lembre-se da ideia principal aqui: usar nossa superfície de Riemann como o espaço de entrada, o domínio, para que nossa multifunção complexa nos dê clareza. Portanto, ao invés de desenhar caminhos ou formas em nosso plano w, deveríamos desenhar em nossa superfície de Riemann.
Desenhar em superfícies tridimensionais pode ser um pouco desafiador, então usaremos uma ferramenta que não foi inventada até mais de um século após a morte de Riemann: o computador!
Assim como com nossa versão em papel, vamos começar com nosso plano w deitado no chão e colocamos nossa superfície de Riemann diretamente acima.

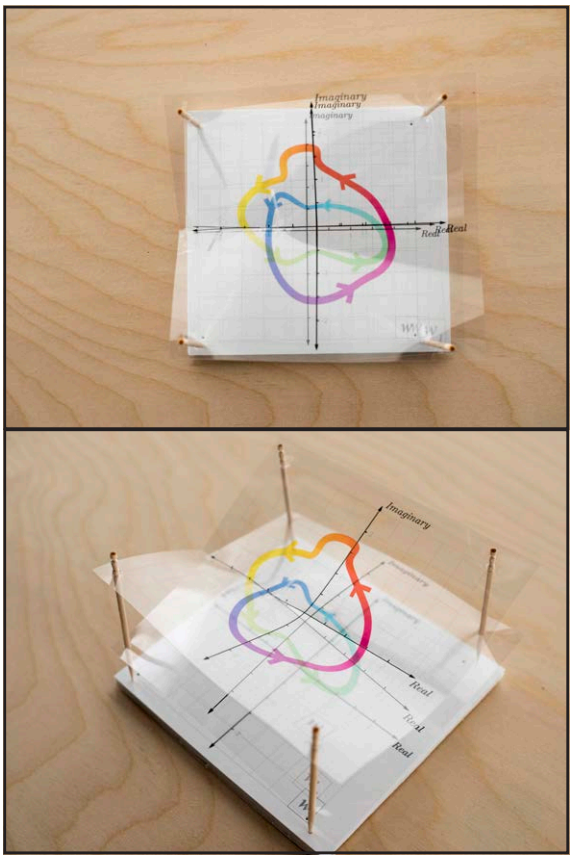


Figura 61 | A Superfície de Riemann da Função $z = f^{-1}(w) \pm \sqrt{w}$. Fizemos essa superfície imprimindo os caminhos da Figura 60 em transparências, cortando os planos em suas descontinuidades e unindo os caminhos com fita adesiva.

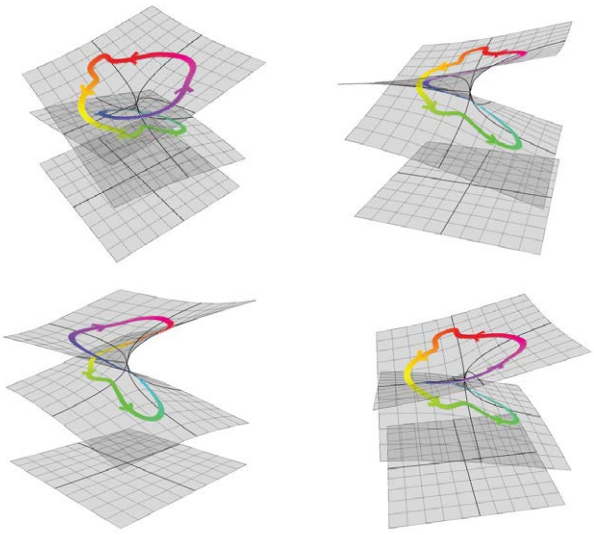


Figura 62 | A Superfície de Riemann da Função $z = f^{-1}(w) \pm \sqrt{w}$. Fizemos essa superfície usando a linguagem de programação Python e a biblioteca de plotagem Plotly.

Antes de começarmos a desenhar caminhos em toda a nossa superfície, vamos ter certeza de que entendemos o que estamos olhando. Estamos tentando entender a função complexa $w = z^2$, ou tomada na outra direção, z é igual a mais ou menos a raiz quadrada de w. O mapeamento entre w e z é o mesmo em ambas

1 Manifold!
2 Topologia, na verdade
3 Ou esfera!

as direções. O desafio de visualização aqui é que nosso mapeamento é quadridimensional, ambos z e w têm partes reais e imaginárias: lá na parte 10 os chamamos de x, y, u and v.

O que vemos quando visualizamos nossa superfície de Riemann é uma superfície bidimensional em um espaço tridimensional. Neste caso, uma vez que posicionamos nossa superfície diretamente acima do plano w, duas de nossas três dimensões correspondem exatamente às partes real e imaginária de w, nós as chamamos de u e v. . Parte da ideia de Riemann é que nossa terceira dimensão deve representar o valor z de nossa função. Mas, como sabemos, z é um número complexo - tem uma parte real e uma parte imaginária, portanto, não há como mostrar as duas em um único eixo.

O que geralmente é feito ao visualizar essas superfícies, e o que estamos fazendo aqui, é simplesmente escolher a parte real ou imaginária de z,[1] e usar esse valor como a terceira dimensão, a altura, de nossa superfície. Na Figura 63, estamos usando x, a parte real de z.

Fazer isso tem um bom resultado visual: cada ponto em nossa superfície de Riemann vive no espaço 3D em um local que corresponde exatamente a seus valores u, v e x. Portanto, cada ponto em nossa superfície representa uma única solução para nossa equação, e 3 dos 4 valores necessários para descrever a solução são representados pela localização dos pontos no espaço 3D.

Este é um bom resultado, mas devemos lembrar que este não é o quadro completo. Há outra variável - a parte imaginária de z, que chamamos de y - que não está incluída em nossa visualização.

Isso se torna importante ao tentar descobrir se realmente corrigimos nosso problema de continuidade. Se seguirmos um caminho ao longo de um único ramo de nossa superfície de Riemann, teremos um pequeno problema de auto interseção,

1 Ou magnitude, ou ângulo!

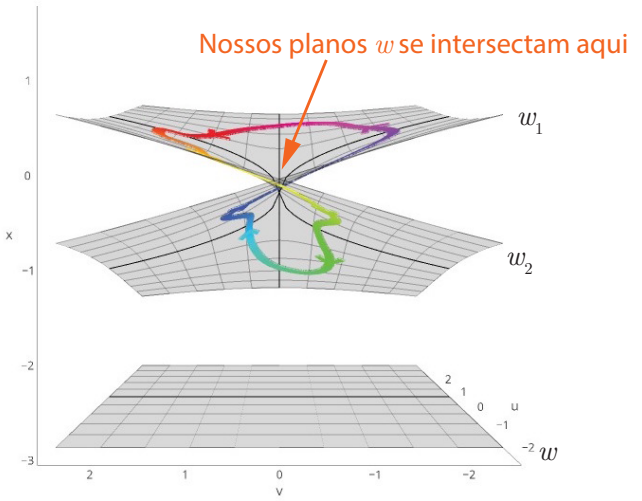


Figura 64 | O que fazer com a interseção de nossos planos w ? Gostaríamos de pensar que corrigimos nosso problema de continuidade, mas ao seguirmos um caminho em torno de nossa superfície, o que devemos fazer quando atingirmos esse ponto de intersecção? Devemos ficar no mesmo plano ou pular para o outro? Como podemos descobrir isso?

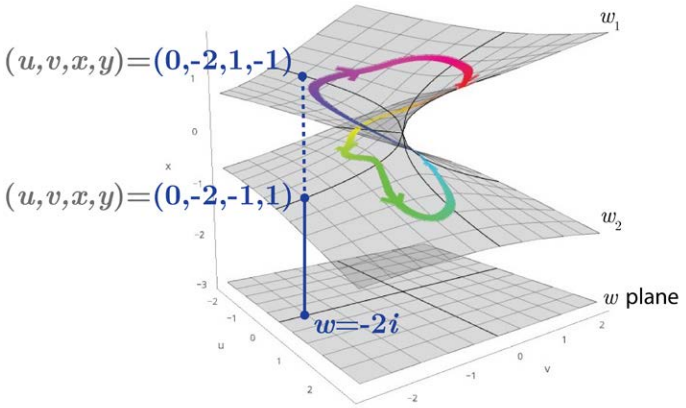


Figura 63 | Cada ponto da superfície é uma solução da função. O ponto w=-2i, quando plugado na multifunção $z = f^{-1}(w) \pm \sqrt{w}$ fornece duas soluções, z=-1+i e z=1-i. Estas soluções mostram os pontos (u,v,x,y) = (0,-2,-1,1) e (0,-2,1,-1) em nossa Superfície de Riemann. 3 de nossas 4 coordenadas aparecem como nossa localização de pontos no espaço 3D.

afinal, devemos permanecer no mesmo plano w ou saltar para o outro?

Para responder a esta pergunta, vamos tentar descobrir por que nossa superfície se auto intersecta em primeiro lugar. Essa interseção acontece ao longo do eixo real negativo em nosso plano w. Vamos considerar um ponto neste eixo: w = -1. Plotar em -1 para w produz duas soluções:

$$z = f^{-1}(w) = \pm\sqrt{w}$$
$$z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Nossas duas soluções z = +i, e -i asão claramente diferentes, mas têm a mesma parte real, zero. Uma vez que estamos apenas visualizando a parte real de z – não temos como *ver* que estes são de fato pontos diferentes.

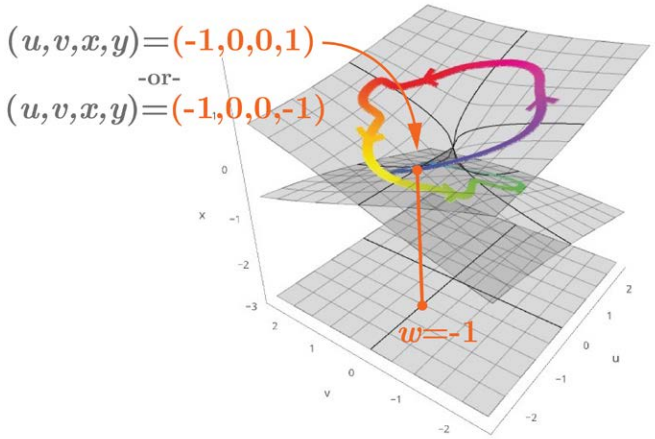


Figura 65 | Tricky Tricky. Ao longo de nossa linha de autointerseção, nossas duas soluções distintas são colapsadas em uma, porque não temos dimensões suficientes para mostrar que nossos dois pontos são, de fato, diferentes.

Este é o perigo de visualizar conceitos matemáticos de dimensões mais altas. O que realmente estamos olhando aqui

é uma projeção, uma sombra, de nossa superfície quadridimensional completa.

Portanto, nossa reta de auto interseção, na verdade... não é. É exatamente como as sombras bidimensionais de objetos tridimensionais, dão a impressão de que os objetos se cruzam.

Existem limitações inerentes aos tipos de estruturas que podemos visualizar no espaço 3D que habitamos.

No entanto, existem algumas maneiras inteligentes de sentir o que está acontecendo em nossa quarta dimensão. Uma abordagem é expandir nossa visualização para incluir outra dimensão da percepção humana,[1] como a cor.

Vamos colorir cada ponto em nossa superfície com uma cor que corresponde ao valor da 4ª dimensão de nossa função - neste caso, a parte imaginária de z, y. Para fazer isso, precisamos decidir quais cores combinar com quais números - isso é chamado de mapa de cores.

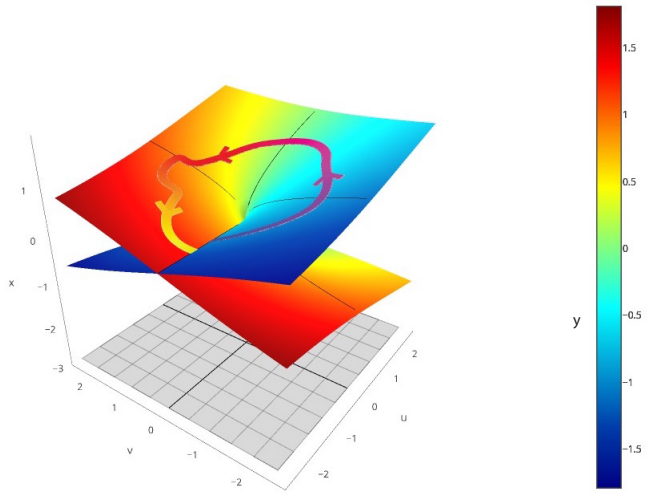


Figura 67 | Uma maneira de visualizar todas as 4 dimensões. Se colorirmos nossa superfície de acordo com nosso valor ausente, y, podemos ter uma ideia melhor do que todas as 4 variáveis estão fazendo ao mesmo tempo. Como nossos planos têm cores diferentes em nossa linha de interseção, isso significa que nossa superfície, na verdade, não se auto intercecta! A aparente auto interseção é o resultado da visualização de um objeto 4D no espaço 3D.

Nossas cores agora nos dão uma boa ideia do que está acontecendo em nossa 4ª dimensão, y. Se olharmos para a nossa linha de auto intersecção agora, é muito mais claro que, uma vez que nossas cores[2] são diferentes, nossa função quadridimensional na verdade não se cruza. A aparente auto interseção é apenas um artefato de nossa técnica de visualização.

Assim, à medida que seguimos caminhos em nossa Superfície de Riemann, a coisa certa a fazer com essas linhas de auto intersecção é ignorá-las. Se agora seguirmos nosso caminho em torno de nossa superfície, veremos que é perfeitamente contínuo, mesmo em nossa estranha linha de auto intersecção.

Excelente.

Isso é ótimo, temos continuidade, mas ainda há uma peça faltando neste quebra-cabeça: como explicar o comportamento

1 Som?! ☺

2 Quaisquer valores y

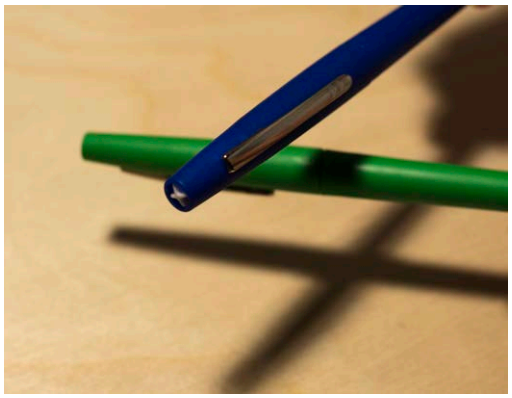


Figura 66 | As sombras não são a imagem completa. As sombras das canetas se interceptam, mas as canetas não! Nossa superfície de Riemann é apenas uma sombra de nossa função quadridimensional completa, completa com falsas interseções.

estranho que vimos na Parte 11, onde alguns caminhos terminavam em novos locais e outros, não?

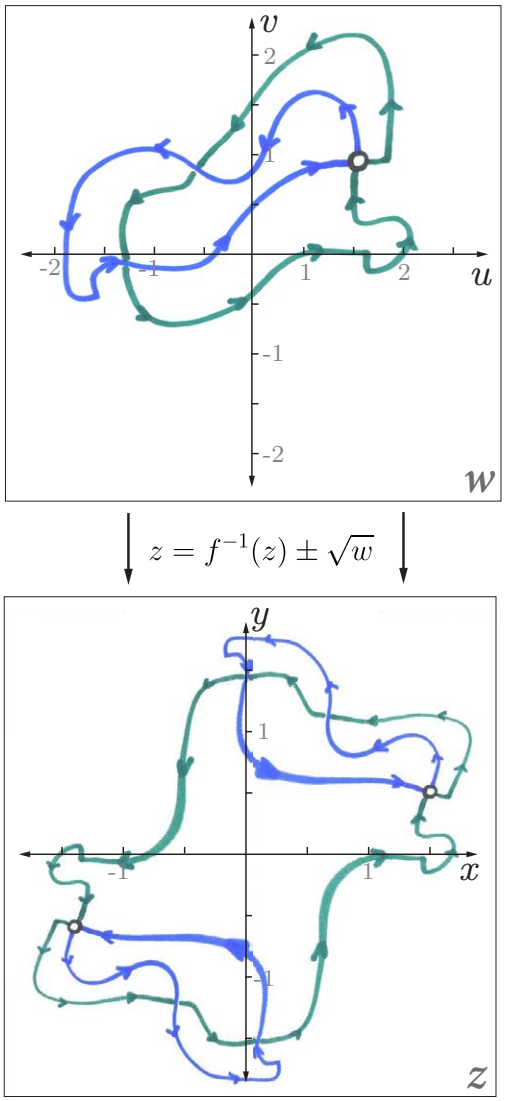


Figura 68 | Outro Par de Caminhos Suspeitos. Mais uma olhada nos tipos de caminhos suspeitos que vimos pela primeira vez na Parte 11. Nossos caminhos azuis voltam para onde começaram, mas nossos caminhos verdes não! Hmmm... Eu me pergunto se há uma maneira melhor de pensar sobre isso ...

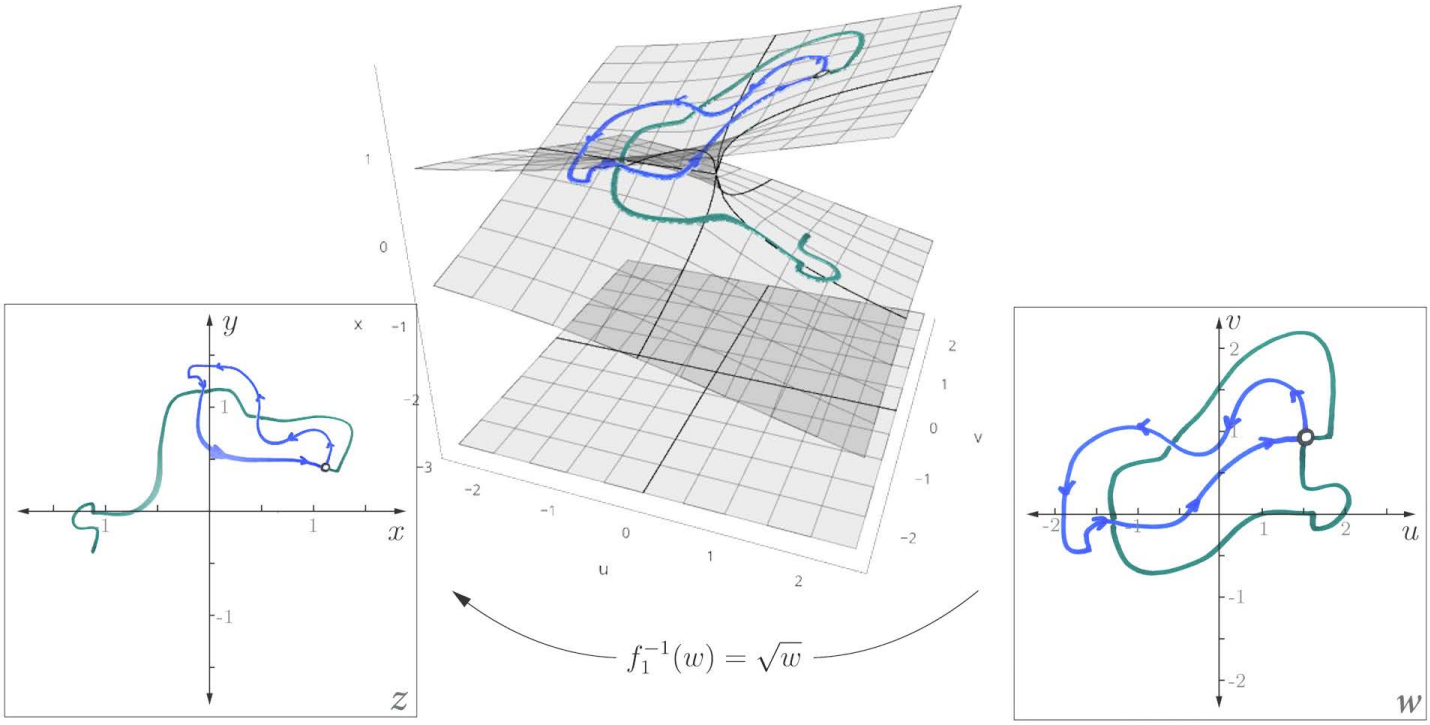


Figura 69 | Superfícies de Riemann são Legais d+. Usando a Superfície de Riemann, podemos ver exatamente por que nosso caminho azul retorna para onde começou, mas nosso caminho verde não!

Vamos recriar esses caminhos suspeitos, desta vez usando nossa Superfície de Riemann para nos ajudar.[1] Para evitar que nossa superfície fique muito lotada, vamos escolher apenas um de nossos dois caminhos para visualizar primeiro.

Vamos desenhar os mesmos caminhos exatos em w e ver como eles aparecem em nossa Superfície de Riemann conforme são mapeados no plano z.

Então, por que nosso caminho verde começa em um local em nosso plano z e termina em outro?

Simplesmente porque nosso caminho verde nos leva à outra camada de nossa superfície.

Da perspectiva do nosso plano w, parece que voltamos exatamente ao nosso ponto de partida, mas na verdade não. O plano w é apenas uma projeção, uma sombra. Na realidade, nosso caminho nos levou a um ramo completamente diferente de nossa função, com diferentes valores de z.[2]

Nossa superfície de Riemann nos permite ver claramente que alguns caminhos em w levam ao outro ramo, e outros não. Mais especificamente, os caminhos que contornam o ponto central da nossa Superfície de Riemann acabam em novos ramos. Esse ponto é chamado de ponto de ramificação - estes ocorrem sempre que as duas ramificações de nossa função têm o mesmo valor exato - e podem nos dizer muito sobre como nossa função complexa se comporta. Para nós, esse é o ponto $w = 0$.

Portanto, nossa superfície de Riemann não apenas corrige os problemas que encontramos anteriormente, mas também explica de maneira belíssima o estranho comportamento do caminho que vimos! E isso é apenas o começo, as superfícies de Riemann são uma grande parte da matemática moderna, e há muito mais a dizer do que temos tempo para aqui.

Okay, estamos **finalmente** prontos para responder à pergunta – o que diabos estava acontecendo na Figura 2?

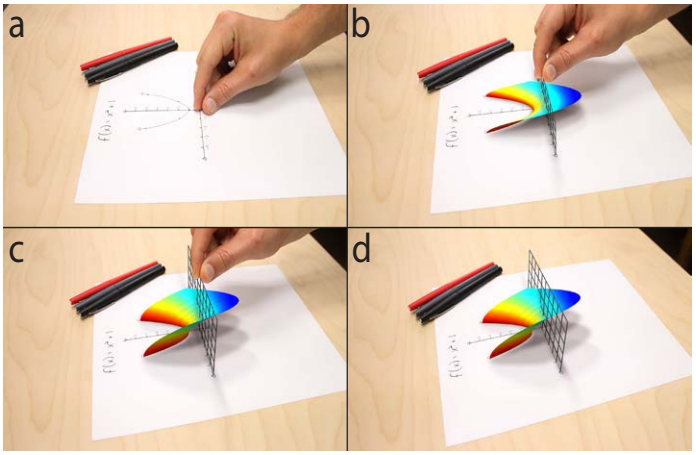


Figura 2 | Gráfico de $f(x) = x^2+1$ onde x inclui os números imaginários. As imagens a-d mostram o "puxar" da função para fora da página.

Toda a nossa discussão girou em torno de uma única função, $f(z)=z^2+1$. E até agora, vimos uma maneira de visualizar a superfície de Riemann para nossa função plotando 3 de nossas 4 variáveis no espaço 3D.

O gráfico bidimensional com o qual começamos nossa discussão lá atrás na Figura 1, o que a maioria de nós vê nas aulas de matemática, mostra apenas 2 de nossas 4 variáveis: as partes reais de z e w. A superfície na Figura 2 é o resultado da inclusão de mais uma variável: a parte imaginária de z como a dimensão vertical de nossa visualização.

1 Mas desta vez usando um marcador mais grosso para tornar as coisas mais claras.

2 A solução sofreu uma monodromia ao longo de seu caminho.

Quando vimos esta superfície pela primeira vez, as pessoas fizeram uma pergunta muito boa: se, de acordo com o teorema fundamental da álgebra, nossa função deve ter exatamente 2 raízes, por que nossa superfície parece ser igual a zero por muito mais de dois locais?

Esta aparente contradição tem tudo a ver com as deficiências de viver em um espaço tridimensional sobre qual estivemos discutindo. Quando visualizamos funções quadridimensionais no espaço tridimensional, devemos lembrar que o que estamos realmente vendo é uma projeção, uma sombra da forma quadridimensional completa das funções.

Vamos dar uma olhada mais de perto em nossa superfície da Figura 2. Em nossa foto de abertura, metade de nossa superfície estava escondida por trás de nosso papel e as cores que usamos foram escolhidas de forma arbitrária para corresponder aproximadamente à altura da superfície.

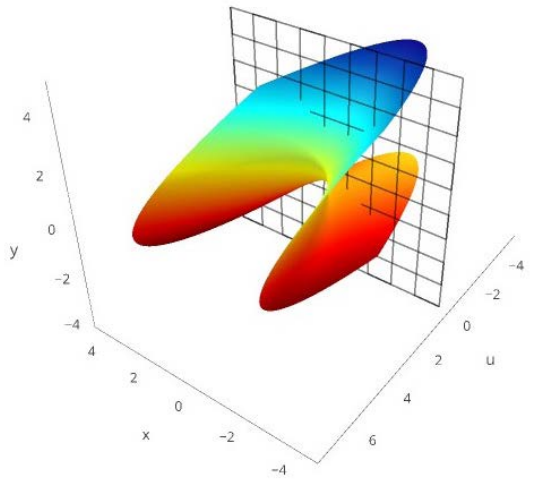


Figura 70 | Um Olhar Mais Detalhado sobre a Superfície da Figura 2. Na Figura 2, metade de nossa superfície está escondida sob o papel.

Agora que sabemos um pouco mais sobre as funções de variáveis complexas, vamos mudar a cor da nossa superfície para corresponder à quarta variável que fomos forçados a deixar de fora de nossa visualização tridimensional – *v*.

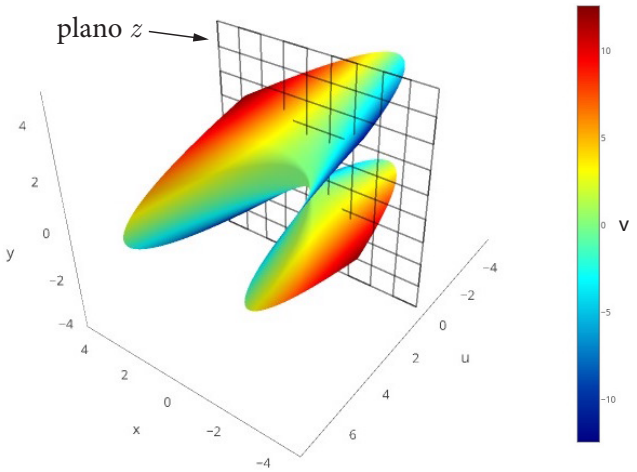


Figura 71 | Cores! Para ter uma ideia melhor do que está acontecendo em todas as 4 dimensões, aqui nós colorimos nossa superfície para corresponder à nossa variável ausente, v.

Agora que temos uma ideia do que todas as quatro variáveis estão fazendo, vamos procurar as duas raízes previstas por Gauss. Lembre-se de que as raízes são onde a saída de nossa função é igual a zero. Para que seja esse o caso, ambas as partes real e lateral de nossa variável de saída *w*, *u* e *v* devem ser zero. Ver onde *u* é igual a zero não é tão ruim - é aqui que nossa superfície intercepta o plano *z*.

Agora, onde *v*, a parte imaginária de nossa variável de saída *w*, é igual a zero? Se olharmos nosso mapa de cores, deve ser onde nossa superfície é verde. É difícil ver exatamente qual tom de verde corresponde a zero,[1] então vamos adicionar uma linha laranja à nossa superfície onde *v* é exatamente igual a zero.

Agora, se olharmos de perto, vemos que ambas as partes real e imaginária de *w* são iguais a zero em exatamente dois pontos: i e $-i$ em nosso plano complexo *z*, exatamente como nossa álgebra previu na Figura 41!

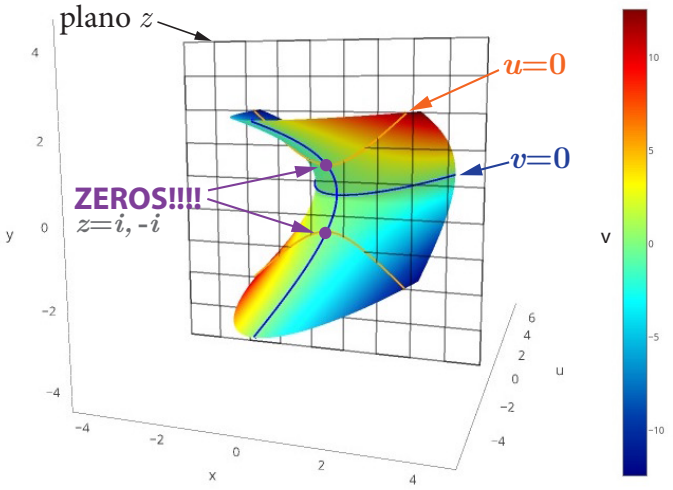


Figura 72 | Finalmente. Os zeros que procuramos desde a parte 1! Giramos em torno de nossa superfície a partir da Figura 71 para obter uma visão melhor. Nossos zeros ocorrem onde as partes reais e imaginárias de *w*, *u* e *v* são iguais a zero. Isso acontece onde nossas linhas laranja e azul se cruzam!

Finalmente encontramos nossas raízes perdidas. Portanto, nosso amigo Gauss estava certo o tempo todo. Nossa função tem *exatamente* 2 raízes.

Claro, encontrar essas raízes exigiu algum esforço! Tivemos que fazer uma jornada profunda na matemática e nos perguntar o que realmente é um número.[2] Isso nos levou à estranha, mas necessária conclusão de que os números que deveríamos realmente usar na álgebra são os números complexos bidimensionais. Este resultado nos arrastou para mais fundo no mundo quadridimensional de funções complexas e as Superfícies de Riemann. Quando finalmente emergimos, vimos que a álgebra que muitos de nós aprendemos na escola é apenas uma sombra de uma matemática elegante, poderosa e de dimensão superior que tem tudo a ver com os números que receberam o terrível nome de imaginários. Obrigado por ler.[3]

1 Uma limitação do uso de cores em vez de uma dimensão espacial!
2 Cara, isso parece uma montagem de filme.
3 Você é demais!

Exercícios 13

Discussão

13.1 Como nossa Superfície de Riemann nos ajudou a entender nosso estranho comportamento de loop?

13.2 Por que nossa reta de auto interseção na verdade não estava fazendo isso?

Pensamento Crítico

13.3 Mostramos duas superfícies diferentes no espaço 3D que representam nossa função $f(z)=z^2$ (Figura 62 e Figura 70). Existem outras superfícies possíveis? Se sim, quantas?

13.4 Que tipos de caminhos poderíamos traçar em nossa Superfície de Riemann que nos levasse exatamente para onde começamos?

13.5 Como a Superfície de Riemann da função $z = \sqrt[3]{w}$ se pareceria?

Desafio

13.6 Para 1.000.000 de pontos, construa uma Superfície de Riemann (em código ou no papel) para uma função diferente de $f(z)=z^2$, e twite uma foto marcando @welchlabs.

Exercises 1

5

Discussion

1.1 Why do you think most people who have lived on our planet would have been suspicious of negative numbers?

1.2 Why do you think negative numbers have been so widely accepted today, despite being somewhat sketchy?

1.3 Do you think negative numbers should be taught to elementary school students? Why or why not?

1.4 How would you explain negative numbers to a 5th grader?

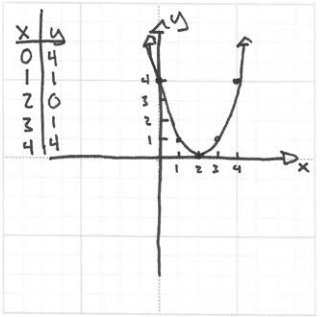
1.5 Which historical civilizations do you think embraced mathematics? Which didn't?

Drill

Plot each function.

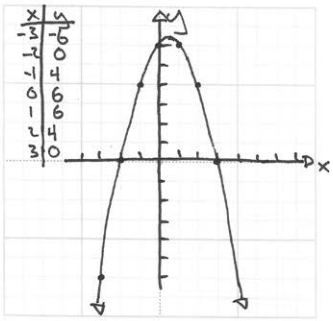
1.6 $f(x) = x^2-4x+4$ = $(x-2)^2$

x	y
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4



1.7 $g(x) = -x^2+x+6$ = $-(x^2-x-6) = -(x-3)(x+2)$

x	y
-3	-6
-2	0
-1	4
0	6
1	6
2	4
3	0



Exercises 1

6

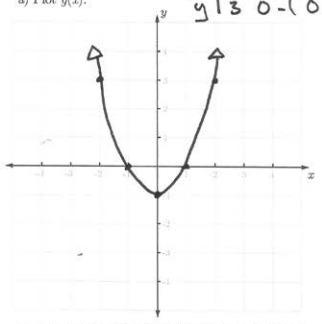
Critical Thinking

1.8 Consider the better-behaved sibling of Equation 1:

$g(x) = x^2-1$

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

a) Plot $g(x)$.



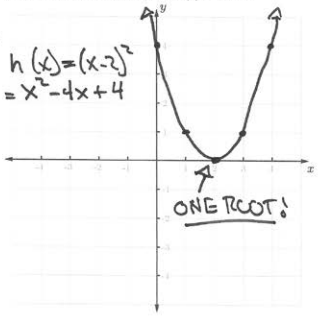
b) For what x-values does $g(x)=0$? $g(x)=0$ when x = 1 or x = -1. These are called the **roots, zeros, or x-intercepts of** g.

c) The roots of g are much easier to find than the roots of f (Equation 1), why is this the case?

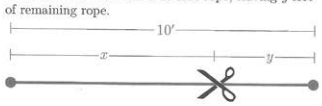
BECAUSE g CROSSES THE X-AXIS.

1.9 So far we've seen a function with 2 roots, g, and a function with no obvious roots, f (Equation 1). Find and plot a highest power of two (quadratic) function with one obvoius root. Call it $h(x)$. Or else.

$h(x) = (x-2)^2$
$= x^2-4x+4$



1.10 You cut x feet from a 10 foot rope, leaving y feet of remaining rope.



a) Write an equation relating x and y.

$x+y=10$.

b) Solve for y when x=7', x=10', and x=13'.

x	y
7	3
10	0
13	-3

$y = 10-x$

c) One of your answers from part b should be negative. Is this result meaninfgul? What does a negative answer tell you about your remaining rope? Does the specific value of your answer matter, or is knowing your answer is negative enough to reach a conclusion about the remaining rope?

THE VALUE -3 IS NOT VERY IMPORTANT, BUT THE FACT THAT ITS NEGATIVE MEANS WE'RE OUT OF ROPE!

Exercises 1

7

1.11 You have exactly 10 minutes to get to class for your big test on lateral numbers! Your friend Gus (who's wierdly in to this sort of thing) says that class is exactly 10,000 feet away. Let's say you travel to class at a rate of r feet/minute. You would like to get there a few minutes early. More specifically, let's say you will arrive t minutes early.

a) Write an equation that relates r and t.

$D = R \cdot T$ (DISTANCE = RATE · TIME)

TIME TRAVELING = $10,000/r$

$t = 10 - \text{TRAVEL TIME} \Rightarrow \boxed{t = 10 - \frac{10000}{r}}$

b) Compute t for r=1250 feet/minute, r=1000 feet/minute, and r=625 feet/minute.

r	t
1250	2
1000	0
625	-6

c) One of your answers from part b should be negative. Is this result meaninfgul? What does a negative answer tell you about when you will arrive to class?

$t=-6$, MEANING WE WILL ARRIVE 6 MINUTES LATE! UNLIKE EXERCISE 1.10, THE VALUE OF THE NEGATIVE NUMBER HERE MEANS SOMETHING.

Challenge

1.12 Consider the function:

$$p(x) = x^4-10x^3+35x^2-50x+24$$

a) According to the fundamental theorem of algebra, how many roots should $p(x)$ have?

4

b) Find all the roots of $p(x)$. You may use technology if you would like, but it's not neccessary to complete the problem.

USING RATIONAL ROOT THEOREM, ROOTS ~~SHOULD~~ COULD BE $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm24$

try 1: $1 \mid 1 \;-10 \;\; 35 \;\; -50 \;\; 24$
$\quad\quad\quad\quad\;\; 1 \;\; -9 \;\; 26 \;\; -24$
$\quad\quad 1 \;\; -9 \;\; 26 \;\; -24 \;\; 0$ ← THAT WORKED LUCKY

$\Downarrow$

$x^3-9x^2+26x-24=0$

try 2: $2 \mid 1 \;\; -9 \;\; 26 \;\; -24$
$\quad\quad\quad\;\; 2 \;\; -14 \;\; 24$
$\quad 1 \;\; -7 \;\; 12 \;\; 0$ ← WORKED!

$\Downarrow$

$x^2-7x+12=0$

$(x-4)(x-3)=0$

$x=4,3$

$\hookrightarrow x=1,2,3,4$

Exercises 2

11

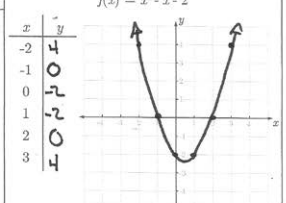
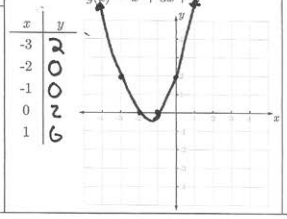
Discussion

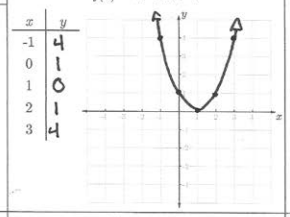
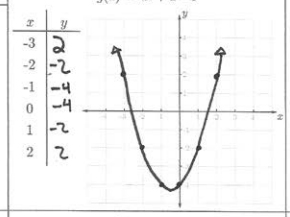
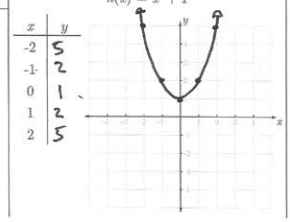
2.1 Why did del Ferro keep his discovery secret?

2.2 Why are problems like $\sqrt{-16}$ strange?

2.3 Why do you think math duels are way less popular today than in the 16th century?

Drill

	Plot	Solve by Factoring (If Possible)	Solve by Quadratic Formula (If Possible)
2.4	$f(x) = x^2-x-2$ 	$0 = x^2-x-2$ $0 = (x-2)(x+1)$ $\Rightarrow \boxed{x=2,-1}$	$0 = x^2-x-2$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $x = \frac{1 \pm 3}{2} = \frac{4}{2}, \frac{-2}{2}$ $\boxed{=2,-1}$
2.5	$g(x) = x^2+3x+2$ 	$0 = x^2+3x+2$ $0 = (x+2)(x+1)$ $\boxed{x=-1,-2}$	$0 = x^2+3x+2$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $x = \frac{-3 \pm 1}{2} = \frac{-2}{2}, \frac{-4}{2}$ $\boxed{=-1,-2}$

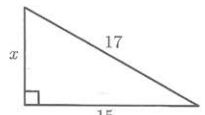
	Plot	Solve by Factoring (If Possible)	Solve by Quadratic Formula (If Possible)
2.6	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ 	$0 = x^2 - 2x + 1$ $0 = (x-1)(x-1)$ $x = 1$	$0 = x^2 - 2x + 1$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2(1)}$ $= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$ $= \frac{2 \pm 0}{2} = 1$
2.7	$g(x) = x^2 + x - 4$ 	$0 = x^2 + x - 4$ NOT FACTORABLE!	$0 = x^2 + x - 4$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$ $= \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$ $= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
2.8	$h(x) = x^2 + 1$ 	$0 = x^2 + 1$ NOT FACTORABLE!	$0 = x^2 + 1$ $x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$ $= \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2}$ $= \frac{\pm\sqrt{4}i}{2}$ ← WE'LL LEARN ABOUT THIS SOON!

Critical Thinking

2.9 Why is the Quadratic Formula useful? Does it allow you to solve any types of problems that you couldn't otherwise? (Hint: compare exercise 2.7 to 2.4-2.6)

THE QUADRATIC FORMULA GIVES YOU THE ~~REAL~~ ROOTS, EVEN WHEN THE POLYNOMIAL IS NOT FACTORABLE.

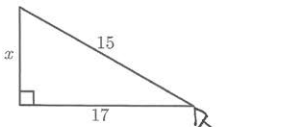
2.10 Solve for x:



$a^2 + b^2 = c^2$
$x^2 + 15^2 = 17^2$
$x^2 + 225 = 289$
$x^2 = 64$
$x = 8$

2.11 Sometimes problems like 2.10 are less straightforward.

a) Solve for x:



$x^2 + 17^2 = 15^2$
$x^2 + 289 = 225$
$x^2 = -64$
$x = \sqrt{-64}$???

b) How did part a go? :) If you used the Pythagorean Theorem to solve for x, the result should have been the square root of a negative number. Sketchy. What's going on here?

THIS TRIANGLE IS IMPOSSIBLE! THE hypotenuse MUST BE THE LONGEST SIDE.

2.12 Where do the parabola $y = x^2 - 4$ and the line $y = 2x - 1$ intersect?

→SET EQUATIONS EQUAL TO EACHOTHER TO FIND INTERSECTION:

$x^2 - 4 = 2x - 1$
$0 = x^2 - 2x - 3$
$0 = (x-3)(x+1)$
$x = 3, -1$

$y = 2x - 1 = 2(3) - 1$
$= 6 - 1 = 5$
$(3, 5)$

$y = 2(-1) - 1$
$= -2 - 1 = -3$
$(-1, -3)$

2.13 Where do the parabola $y = x^2 - 4$ and the line $y = 2x - 3$ intersect?

$x^2 - 4 = 2x - 3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
↳ NOT FACTORABLE.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
$= 1 \pm \sqrt{2}$

$y = 2(1+\sqrt{2}) - 3$
$y = 2 + 2\sqrt{2} - 3$
$= -1 + 2\sqrt{2}$
$(1+\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2})$

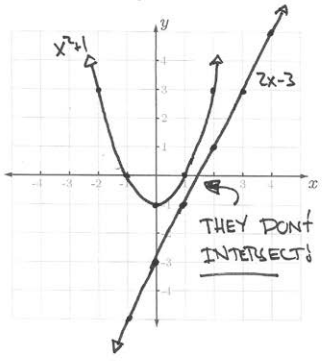
$y = 2(1-\sqrt{2}) - 3$
$y = 2 - 2\sqrt{2} - 3$
$= -1 - 2\sqrt{2}$
$(1-\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2})$

2.14 a) Where do the parabola $y = x^2 - 1$ and the line $y = 2x - 3$ intersect?

$x^2 - 1 = 2x - 3$
$x^2 - 2x + 2 = 0$ → NOT FACTORABLE

$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$???

b) Using the Quadratic Formula to solve part a should have resulted in the square root of negative number. What does this mean about the problem? Plot the parabola and line from part a below.



2.15 Solve the equation $x^3 = 8$ using del Ferro's formula (Equation 4).

$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27}}}$,
$x^3 + cx = d$.

$c = 0, d = 8$
$x = \sqrt[3]{\frac{8}{2} + \sqrt{\frac{64}{4} + \frac{0^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{8}{2} - \sqrt{\frac{64}{4} + \frac{0}{27}}}$
$x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{16}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{16}}$
$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{0}$
$x = 2 + 0 \Rightarrow x = 2$

2.16 Solve the equation $x^3 + 6x = 20$ using del Ferro's formula (Equation 4).

$x = \sqrt[3]{\frac{20}{2} + \sqrt{\frac{400}{4} + \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{20}{2} - \sqrt{\frac{400}{4} + \frac{216}{27}}}$
$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{100+8}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{100+8}}$
$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$
↓
TECHNOLOGY :)
↓
(2)

2.17 Solve the equation $x^3 = x + 2$ using Cardan's modified version of Del Ferro's formula (shown in the 3rd row of Table 2).

$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}}$,
$x^3 = cx + d$.

$x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{27}}}$
$= \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}}$
$= 1.52137797$

Challenge

2.18 Derive the Quadratic Formula from $ax^2 + bx + c = 0$ by completing the square.

2.19 Derive del Ferro's formula from $x^3 + cx = d$ by witchcraft.

} SHOWN IN VIDEO :)

2.20 What exact values of c and d result in the square roots of negative numbers in Cardan's formula (row 3 of, column 5 of Table 2)? Exactly how many real solutions must this type of cubic have?

$\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27} < 0$.

↳ WHEN THIS IS TRUE, THERE WILL BE 3 REAL SOLUTIONS. SEE p. 20 OF PAUL NAHIN'S EXCELLENT BOOK: "AN IMAGINARY TALE: THE STORY OF $\sqrt{-1}$"

Exercises 3

18

Discussion

3.1 Rafael Bombelli was born in 1526. For thousands of years before Bombelli's time, people used mathematics to solve all kinds of problems without any need for $\sqrt{-1}$. What do you think was so compelling about Cardan's problem that led Bombelli to consider using a completely new type of number to solve it?

3.2 Imagine you're working on a hard math problem. In fact, it's so hard, that no one on the planet has solved it yet. You work and work and work and get nowhere. Your friend Gus, who has been working on the same problem, excitedly tells you that he's found a solution! He shows you his work, and tells you that it works perfectly with one minor catch. To solve the problem he has allowed an entirely new kind of number to exist. A type of number that no one has used before. How would you respond to Gus?

Drill

Simplify the following. Helpful examples can be found in Table 3 and Equation 9.

3.3 $\sqrt{-16}$

$= \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$

3.4 $\sqrt{-51}$

$= \sqrt{51}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{51}\sqrt{-1}$

3.5 $\sqrt{-4}$

$= \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$

3.6 $\sqrt{-5} + \sqrt{-5}$

$2\sqrt{-5} = 2\sqrt{5}\sqrt{-1}$

3.7 $\sqrt{-5} + \sqrt{5}$

$\sqrt{5}\sqrt{-1} + \sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{-1}+1)$

3.8 $16 + \sqrt{-16}$

$16 + \sqrt{16}\sqrt{-1}$

$16 + 4\sqrt{-1}$

3.9 $\sqrt{-4}\sqrt{4}$

$= 2\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$

$= 4\sqrt{-1}$

3.10 $\sqrt{-512}$

$2 \mid 512$, $2 \mid 256$, $16 \mid 16$

$= \sqrt{2\cdot256}\cdot\sqrt{-1}$

$= 16\sqrt{2}\sqrt{-1}$

3.11 $7/\sqrt{-7}$

$\frac{7}{\sqrt{-7}}\cdot\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-7}} = \frac{7\sqrt{-7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{-1}} = \frac{7\sqrt{7}}{7\cdot-1}$

$= \sqrt{7}\sqrt{-1}$

3.12 $\sqrt{-4}\,\sqrt{-4}$

$= \sqrt{4}\sqrt{-1}\sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\cdot2\cdot(\sqrt{-1})^2$

$= -4$

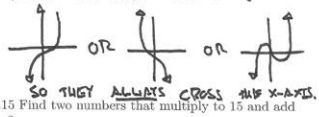
3.13 $1/\sqrt{-1}$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{-1} = -\sqrt{-1}$

Critical Thinking

3.14 Why do all cubic functions have to have at least one root?

BECAUSE ALL CUBICS ARE SHAPED LIKE :



OR OR

SO THEY ALWAYS CROSS THE X-AXIS.

3.15 Find two numbers that multiply to 15 and add to 8.

$xy = 15 \quad x+y = 8$

$y = 8-x$

$x(8-x) = 15$

$8x - x^2 = 15$

$0 = x^2 - 8x + 15$

$0 = (x-3)(x-5)$

$x = 3, 5$

3.16 Find two numbers that multiply to 11,187 and add to 212. $xy = 11187 \quad x+y = 212$

$y = 212 - x$

$x(212-x) = 11187$

$212x - x^2 = 11187$

$0 = x^2 - 212x + 11187$ ← FACTORABLE? WHO THE HECK KNOWS?

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{212 \pm \sqrt{212^2 - 4\cdot1\cdot11187}}{2\cdot1} = 99, 113$

3.17 a) Find two numbers that multiply to 40 and add to 10. $xy = 40 \quad x+y = 10$

$x(10-x) = 40$

$10x - x^2 = 40$

$0 = x^2 - 10x + 40$ → NOT FACTORABLE.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot1\cdot40}}{2}$

$= \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2}$

$= 5 \pm \frac{2\sqrt{-15}}{2}$

$= 5 \pm \sqrt{-15}$

b) How did part a go? This problem dates back to Cardan himself. In his book Ars Magna, Cardan gives the task of dividing 10 into parts whose product is 40, and calls this "manifestly impossible." You may have reached a similar conclusion. However, Cardan does push on in Ars Magna and gives the solution $5+\sqrt{-15}$, and $5-\sqrt{-15}$. Show that these numbers add to 10 and multiply to 40.

$5+\sqrt{-15}$

$+\ 5-\sqrt{-15}$

$10\ \checkmark$

$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})$

$25 + 5\sqrt{-15} - 5\sqrt{-15} - (\sqrt{-15})^2$

$25 - (-15)$

$= 40\ \checkmark$

Interestingly, even though Cardan gave this solution, he didn't think very highly of it, saying: "So progressing arithmetic subtlety the end of which, as is said, is refined as it is useless."

Challenge

$q(x) = 6x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 20x - 16$

3.18 One solution to $q(x)=0$ is $\sqrt{-4}$. Find all other solutions. WE'LL SEE LATER THAT IF $\sqrt{-4}$ IS A SOLUTION, $-\sqrt{-4}$ MUST BE ONE TOO.

	6	−5	20	−20	−16
$2\sqrt{-1}$		$12\sqrt{-1}$	$-10\sqrt{-1}$	$20-8\sqrt{-1}$	16
	6	$-5+12\sqrt{-1}$	$10-10\sqrt{-1}$	$-8+8\sqrt{-1}$	0 ✓
$-2\sqrt{-1}$		$-12\sqrt{-1}$	$10\sqrt{-1}$	$8\sqrt{-1}$	
	6	−5	−4	0 ✓	

$6x^2 - 5x - 4 = 0$

$6x^2 - 8x + 3x - 4 = 0$

$2(3x^2-4) + 1(3x-4) = 0$

$(2x+1)(3x-4) = 0$

$x = -1/2, 4/3, 2\sqrt{-1}, -2\sqrt{-1}$

Exercises 4

22

Discussion

4.1 Why do you think Cardan and Bombelli mistrusted $\sqrt{-1}$?

4.2 The Greeks were arguably the most sophisticated mathematicians of the ancient world, and today are remembered for their many contributions to geometry. If Bombelli were to travel back in time, do you think he could convince the ancient Greeks to adopt $\sqrt{-1}$?

Drill

4.3 $\sqrt{-1}\cdot(1+\sqrt{-1})$

$= \sqrt{-1} + (\sqrt{-1})^2$

$= \sqrt{-1} - 1$

4.4 $(1-\sqrt{-1})\cdot(1+\sqrt{-1})$

$1 - \sqrt{-1} + \sqrt{-1} - (\sqrt{-1})^2$

$1+1 = 2$ ✗ 3rd!

4.5 $(2+3\sqrt{-1})\cdot(2+3\sqrt{-1})$

$4 + 6\sqrt{-1} + 6\sqrt{-1} + 9(\sqrt{-1})^2$

$4 + 12\sqrt{-1} - 9$

$-5 + 12\sqrt{-1}$

4.6 $(5-2\sqrt{-1})^2 = (5-2\sqrt{-1})(5-2\sqrt{-1})$

$= 25 - 10\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} + 4(\sqrt{-1})^2$

$= 25 - 20\sqrt{-1} - 4 = 21 - 20\sqrt{-1}$

4.7 $(5\sqrt{-1}-2\sqrt{-1})^2$

$= (3\sqrt{-1})^2 = 9\cdot-1 = -9$

Solve for a and b:

4.8 $2+\sqrt{-121} = a+b\sqrt{-1}$

$a = 2$

$\sqrt{-121} = b\sqrt{-1}$

$\sqrt{121}\sqrt{-1} = b\sqrt{-1}$

$b = \sqrt{121} = 11$

4.9 $\sqrt{-4} = a+b\sqrt{-1}$

$a = 0$

$b\sqrt{-1} = \sqrt{-4}$

$b\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$

$b = 2$

4.10 $\sqrt{4} = a+b\sqrt{-1}$

$2 = a + b\sqrt{-1}$

$b = 0 \quad a = 2$

Find a solution by guessing and checking:

4.11 $a^2 + b^2 = 50$
$a - b^2 = 6$

* what perfect Ds added to Fifty?

$a = 7, \quad b = 1$

4.12 $a(a^2 + b^2) = 0$
$a + b = 1$

$a = 0, \quad b = 1$

4.13 $a(a^2 + b^2) = 2$
$a + b = 2$

$a = 1 \quad b = 1$

Critical Thinking

In this section, we'll try to get a better feel for exactly how Bombelli solved Cardan's problem, $x^3 = 15x + 4$.

4.14 How did Bombelli justify writing the equation below?

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1} \qquad (11)$$

SINCE HE KNEW THE ANSWER WAS A REAL NUMBER, BOMBELLI GUESSED THAT THE "$\sqrt{-1}$" PARTS WOULD CANCEL WHEN ADDED.

4.15 Show that cubing the top line of Equation 11 results in:

$$2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + b\sqrt{-1}(3a^2 - b^2)$$

$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)^3 = (a + b\sqrt{-1})^3$

$2 + \sqrt{-121} = (a^2 + 2ab\sqrt{-1} + b^2(\sqrt{-1})^2)(a+b\sqrt{-1})$

$= (a^2 + 2ab\sqrt{-1} - b^2)(a+b\sqrt{-1})$

$= a^3 + 2a^2b\sqrt{-1} - ab^2 + a^2b\sqrt{-1} + 2ab^2(\sqrt{-1})^2 - b^3\sqrt{-1}$

$= a^3 - 3ab^2 + 3a^2b\sqrt{-1} - b^3\sqrt{-1}$

$= a(a^2 - 3b^2) + b\sqrt{-1}(3a^2 - b^2)$

4.16 Show that:

$$2 = a(a^2 - 3b^2)$$
$$11 = b(3a^2 - b^2) \qquad (12)$$
$$= 11\sqrt{-1}$$

by equating the 'normal' and '$\sqrt{-1}$' parts from exercise 4.15.

$2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + \sqrt{-1}\,b(3a^2 - b^2)$

(=) (=)

4.17 Back in exercise 4.15, we only cubed the top line of Equation 11. Cube both sides of the bottom line of 11, and turn the result into a system of equations as the did in Exercise 4.16. What do you notice?

$\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\right)^3 = (a - b\sqrt{-1})^3$

$2 - \sqrt{-121} = (a^2 - ab\sqrt{-1} - ab\sqrt{-1} + b^2(\sqrt{-1})^2)(a - b\sqrt{-1})$

$= (a^2 - 2ab\sqrt{-1} - b^2)(a - b\sqrt{-1})$

$= a^3 - 2a^2b\sqrt{-1} - ab^2 - a^2b\sqrt{-1} + 2ab^2\sqrt{-1} + b^3\sqrt{-1}$

$= a^3 - 3ab^2 - 3a^2b\sqrt{-1} + b^3\sqrt{-1}$

$= a(a^2 - 3b^2) - \sqrt{-1}\cdot b(3a^2 - b^2)$

$2 = a(a^2 - 3b^2) \quad 11 = b(3a^2 - b^2)$

→ SAME EQUATIONS!

4.18 Using Equation 12, and the fact that $x=4$ is a solution to our Cardan's problem, $x^3 = 15x + 4$, derive that $a = 2$ and $b = 1$.

FROM (4), $a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = 4$

$2a = 4 \Rightarrow a = 2$

$2 = a(a^2 - 3b^2)$

$2 = 2(2^2 - 3b^2)$

$1 = 4 - 3b^2$

$-3 = -3b^2$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

Exercises 4 24

4.19 The solution we found to Equation 12, a = 2 and b = 1, mean that this must be true:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

cube both sides to each equation to prove this.

$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)^3 = (2+\sqrt{-1})^3$

$2+\sqrt{-121} = (4+2\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2)\cdot(2+\sqrt{-1})$

$= (4+4\sqrt{-1}-1)(2+\sqrt{-1})$

$= (3+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})$

$= 6+3\sqrt{-1}+8\sqrt{-1}+4(\sqrt{-1})^2$

$2+11\sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1}$ ✓

4.20 Finally, show that using our solution above does result in a solution to Cardan's problem, $x^3=15x+4$.

$(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) = 4$

$4^3 = 15\cdot 4+4$

$64 = 60+4$ ✓

4.21 So, what *is* the expression below (remarkably) equivalent to?

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

4 (HOLY CRAP)

If you feel that Bombelli's method is a bit hacky, you're in good company. The sketchiness here really surrounds taking the cube root of our new types of numbers that involve $\sqrt{-1}$. Problems like this have confused lots of very smart mathematicians. In the next few workbook sections, we'll find a nice way to think about these problems that makes this process much simpler and intuitive.[1]

Challenge

4.22 Solve for a and b:

$\left(\sqrt{\sqrt{-4}}\right)^2 = \left(a+b\sqrt{-1}\right)^2$

$\sqrt{-4} = a^2+2ab\sqrt{-1}-b^2$

$0+2\sqrt{-1} = a^2-b^2+\sqrt{-1}\cdot 2ab$

$0 = a^2-b^2 \qquad 2\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\cdot 2ab$

$a^2 = b^2 \qquad 1 = ab \Rightarrow b = 1/a$

$a^2 = (1/a)^2$

$a^4 = 1$

$a = 1 \Rightarrow b = 1$

4.23 Perhaps not surprisingly, Equation 12 has more than one solution. Show that other solutions to Equation 12 lead to more solutions to Cardan's original problem, $x^3=15x+4$. You may use technology. (Unless you're a complete bad-ass and don't need it)

FROM WOLFRAM ALPHA:

$a = -1-\sqrt{3}/2 \quad b = \sqrt{3}-1/2 \Rightarrow -2-\sqrt{3}$

$a = \sqrt{3}/2-1 \quad b = -1/2-\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}-2$

1 Once we cover this exciting new ground, we'll revisit this problem in the Critical Thinking exercises in Section 8.

Exercises 5

28

Discussion

5.1 Why might interpreting multiplication by a negative number as a 180° rotation make sense?

5.2 Why might it make sense for imaginary numbers to be placed at a right angle to real numbers?

5.3 Do you think numbers are two-dimensional? Why or why not?

Drill

5.4 i^2 -1

5.5 i^{20} 1

5.6 i^{21} i

5.7 i^{22} -1

5.8 i^{23} $-i$

5.9 i^{1000} 1

5.10 i^{1001} i

5.11 i^{1002} -1

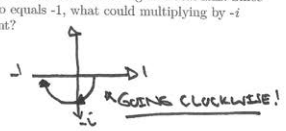
5.12 i^{1003} $-i$

5.13 $i^{-1} = 1/i \Rightarrow \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

5.14 $i^{-20} = \frac{1}{i^{20}} = \frac{1}{1} = 1$

Critical Thinking

5.15 As shown in Figure 18, multiplying i by itself ($i^2 = -1$) can be interpreted as a 180° rotation from the positive real axis to the negative real axis. Since $(-i)^2$ also equals -1, what could multiplying by $-i$ represent?



5.16 True or false?

$\sqrt{-1} < 2$

NEITHER! $\sqrt{-1}$ DOES NOT FIT ON THE NUMBERLINE. TRICK QUESTION SUCKA.

Exercises 5 31

The central idea of this section, that imaginary numbers should be placed at a right angle to the real numbers, is not obvious. We know this because it took over 200 years after Bombelli's death to discovered. This idea was finally unearthed by two non-mathematicians separately, Casper Wessel and Jean-Robert Argand, around 1800. However, like most good ideas in math and science, this one took quite some time to be accepted. In 1831, the mathematician Augustus deMorgan said of the topic:

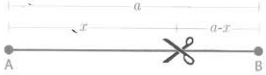
"We have shown the symbol $\sqrt{-1}$ to be void of meaning, or rather self-contradictory and absurd."

It's interesting to think about how exactly mathematicians struggled with and argued about these ideas during this period. A long standing practice in mathematics, (dating most notably back to the Greeks), is the idea of geometric proof. Speaking very roughly: if we can represent a mathematical idea visually, it must be true. Whether or not this is the right way to approach mathematics is an open question, but this way of thinking is certainly valuable, and fueled mathematical development for millennia. When $\sqrt{-1}$ began showing up in mathematics in the 17th century, many mathematicians attempted and failed to find a way to explain or understand $\sqrt{-1}$ visually/geometrically. This difficulty contributed to the mistrust of $\sqrt{-1}$.

Now that $\sqrt{-1}$ has a strong visual interpretation (existing at a right angle to the real numbers) and has become firmly rooted in mathematics, it's interesting to look back at historical attempts to show visually what the $\sqrt{-1}$ could possibly mean. One interesting example comes from an 1803 publication from Lazare Carnot:

Given a line segment AB of length a, how can it be divided into two shorter segments so that the product of their lengths is equal to one-half the square of the original length?

Let's temporarily assume that drawing pictures to represent mathematics is a good idea and draw a picture.



From Carnot's problems statement, we can write the formula:

$$x(a-x) = \frac{1}{2}a^2$$

5.17 Let's say $a = 8$ in Carnot's problem. Solve for x, the length of one of our segments.

NOT FACTORABLE

$x(8-x) = \frac{1}{2}8^2$

$8x-x^2 = 32 \Rightarrow 0 = x^2-8x+32$

$x = \frac{+8\pm\sqrt{(8)^2-4\cdot 1\cdot 32}}{2\cdot 1} = \frac{8\pm\sqrt{64-128}}{2}$

$= 4\pm\frac{\sqrt{-64}}{2} = 4\pm\frac{8\sqrt{-1}}{2} = 4\pm 4i$

How did Exercise 5.17 go? When Carnot solved this equation for x, his result was a complex number (hopefully your result was complex as well, specifically 4+4i and 4-4i). Carnot interpreted the fact that his result was complex as meaning that the cut point we're looking for does not lie on AB, thus the problem was physically impossible. However, other mathematicians (such as the Frenchman Abbé Adrien-Quentin Buée) interpreted this result differently. Roughly speaking, Buée agreed that the problem was physically impossible, but argued that the results was nonetheless meaningful. More specifically, if we allow imaginary numbers to exist in the dimension perpendicular to the real axis, we obtain some type to picture like this:

5.18 What is the distance between A and C, shown above?

$AC = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

5.19 Does your answer to 5.18 make sense in terms of Carnot's original problem? YES! (SORTOF). THE LENGTHS $4\sqrt{2}$, WHEN MULTIPLIED, YIELD EXACTLY HALF OF THE ORIGINAL LENGTH!

So, if we allow imaginary numbers to live perpendicularly to the real numbers, the answer we obtain does make some type of sense. Sure, there's still no way to cut the string the achieve what we want physically, but the results also are not meaningless. They tell us there is an answer, but we must move 4 units in the perpendicular (imaginary) direction to find it. Problems like this don't make a very strong case for $\sqrt{-1}$, which helps me understand why this matter was so contentions for so long. Only later, when our geometric interpretation $\sqrt{-1}$ was shown to be indispensable to math and science did these ideas become widely accepted.

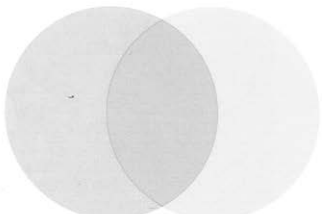
Exercises 6

34

Discussion

6.1 Why did Guass prefer the names direct, inverse, and lateral over positive, negative, and imaginary?

6.2 What do the xy plane and the complex plane have in common? How are the different? Fill in your answers in the super cool Venn diagram below.



Drill

Simplify:

6.3 $(1+i)(1+i)$ $1+i+i+i^{2-1}$ $2i$

6.4 $(1+i)(1-i)$ $1+i-i-i^{2-1}$ $1+1 = 2$

6.5 $(2+2i)(1-2i)$ $2-4i+2i-4i^2$ $2-2i-4\cdot-1$ $6-2i$

6.6 $-i(3+5i)$ $-3i-5i^{2-1}$ $5-3i$

6.7 $(x+(1+i))((x+(1-i))$ $x^2+(1+i)x+(1-i)x+(1+i)(1-i)$ $x^2+x+ix+x-ix+1+i-i-i^2$ x^2+2x+2

6.8 $(-2-i)^2 = (-2-i)(-2-i) = 4+2i+2i+i^{2-1} = 3+4i$

Simplify (your answer should not have an i in the denominator):

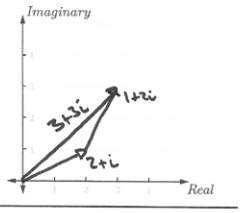
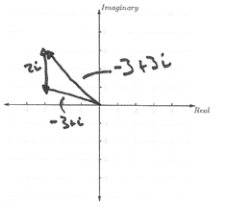
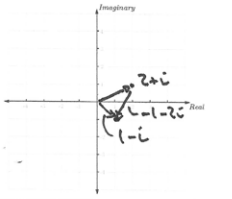
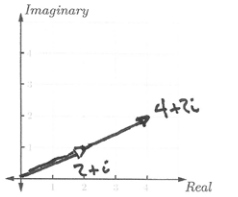
6.9 $\frac{1}{1-i}\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{1+i}{1+i-i-i^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

6.10 $\frac{i}{1+2i}\frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{i-2i^2}{1-2i+2i-4i^2} = \frac{i+2}{1+4} = \frac{i+2}{5}$ or $\frac{2}{5}+\frac{i}{5}$

6.11 $\frac{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}i\right)}{\left(1-\sqrt{2}i\right)}\frac{\left(1+\sqrt{2}i\right)}{\left(1+\sqrt{2}i\right)} = \frac{1/2+\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\sqrt{6}}{1-\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2i^2}$

$= \frac{1/2-\sqrt{6}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}/2\right)i}{3}$

Exercises 6 35

	Problem	Solve Algebraically	Solve Graphically
6.12	$(2+i) + (1+2i)$	$2+i$ $+\ 1+2i$ $3+3i$	
6.13	$(-3+i) + 2i$	$-3+i+2i$ $= -3+3i$	
6.14	$(2+i) - (1+2i)$ *Vaguely helpful hint: Try writing as an addition problem.	$=(2+i)+(-1-2i)$ $= 1-i$	
6.15	$2\cdot(2+i)$	$4+2i$	

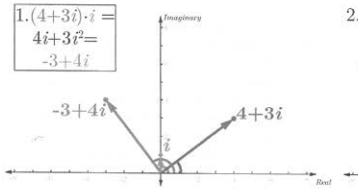
Exercises 6 36

Critical Thinking

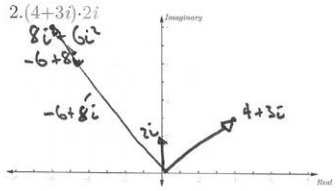
6.16 **What is the connection between complex multiplication and the complex plane?** To figure this out, we'll look at four examples. This is by far my favorite exercise in the entire workbook. It's cool because if you figure it out, you'll have discovered something that mathematicians missed for over 200 years.

a) To get started, for each example compute the product, plot the two numbers we're multiplying together, and plot the result. The first example has been done for you.[1]

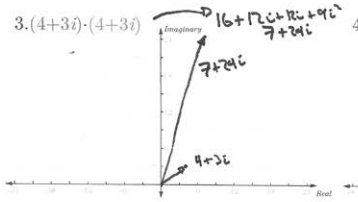
1. $(4+3i)\cdot i = 4i+3i^2 = -3+4i$



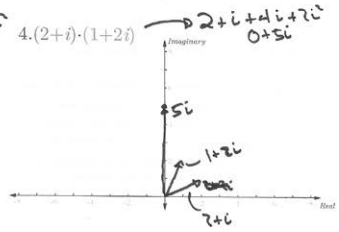
2. $(4+3i)\cdot 2i$
 $8i + 6i^2$
 $-6+8i$



3. $(4+3i)\cdot(4+3i)$
 $16+12i+12i+9i^2$
 $7+24i$



4. $(2+i)\cdot(1+2i)$
 $2+i+4i+2i^2$
 $0+5i$



b) Use your results from a to complete the table below.

Problem	Result	Angle 1	Angle 2	Result Angle	Distance 1	Distance 2	Result Distance
$(4+3i)\cdot i$	$-3+4i$	36.9°	90°	126.9°	5	1	5
$(4+3i)\cdot 2i$	$-6+8i$	36.9	90°	126.9	5	2	10
$(4+3i)\cdot(4+3i)$	$7+24i$	36.9°	36.9°	73.8°	5	5	25
$(2+i)\cdot(1+2i)$	$5i$	26.6°	63.4°	90°	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	5

c) What patterns do you see? What is the connection between complex multiplication and the complex plane?

ANGLES ADD, DISTANCES MULTIPLY! SEE P. 37.

1 Wow, that Stephen Welch is such a nice guy, doing a whole problem for you!

Exercises 7 40

Discussion

7.1 The main idea of this section is that there are two very different, but completely equivalent methods we can use to multiply complex numbers. How could such seemingly different approaches can yield the same exact results?

7.2 Can you think of an example where using the polar form of complex numbers would make life easier?

7.3 Why do you think it took over 200 years for the connection between complex multiplication and the complex plan to be discovered?

Convert to rectangular form:

7.6 $1\angle 45°$

$\sin 45 = y/1$
 $y = \sqrt{2}/2$
 $\cos 45 = x/1$
 $x = \sqrt{2}/2$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

7.7 $5\angle 30°$

$\sin 30 = y/5$
 $y = 5\sin 30 = 5/2$
 $\cos 30 = x/5$
 $x = 5\cos 30 = 5\sqrt{3}/2$
 $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

7.8 $5\angle 150°$

JUST LIKE THIS!
 $-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

7.9 $3\angle 270°$

$-3i$

Critical Thinking

Solve these suckers:

7.10 $(1+i)(1+i)$

$1+i+i+i^2$
 $1+2i-1 = 2i$

Drill

Convert to polar form:

7.4 $1+i$

$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
 $\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$
 $\sqrt{2}\angle 45°$

7.5 $2-3i$

$\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
 $\theta = \tan^{-1}(-3/2) = -56.3°$
 $\sqrt{13}\angle -56.3°$

7.5 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\sqrt{(1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$
 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$
 $1\angle 60°$

7.11 $(\sqrt{2}\angle 45°)(\sqrt{2}\angle 45°)$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$
 $45° + 45° = 90°$
 $2\angle 90°$

7.12 How are 7.10 and 7.11 related?

SAME PROBLEM, DIFFERENT FORMS.

Exercises 7 41

Convert to polar form, solve, and convert your answer back to rectangular form. For extra credit draw a pretty picture that shows what's happening.[1]

7.13 $(2+2i)(2+2i)$

$(2\sqrt{2}\angle 45°)(2\sqrt{2}\angle 45°)$
 $4(\sqrt{2})^2\angle 90°$
 $8\angle 90°$
 $8i$

7.14 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$(1\angle 60°)(1\angle 30°)$
 $1\angle 90° = i$

7.15 $\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)} = \frac{1\angle 60°}{1\angle 30°}$

$= \frac{1}{1}\angle 60-30$
 $= 1\angle 30°$
 $= \sqrt{3}/2 + 1/2\,i$

7.16 $(1+i)(1+i)(1+i)$

$(\sqrt{2}\angle 45°)(\sqrt{2}\angle 45°)(\sqrt{2}\angle 45°)$
 $= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\angle 45°+45°+45°$
 $= 2\sqrt{2}\angle 135°$
 $x = 2\sqrt{2}\cos 45° = 2$
 $y = 2$
 $-2+2i$

7.17 $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)$

$(\sqrt{2}\angle 45°)^4 = 4\angle 180°$
 -4

7.18 $\frac{2i}{1+i} = \frac{2\angle 90°}{\sqrt{2}\angle 45°}$
 $= \frac{2}{\sqrt{2}}\angle 90°-45°$
 $= \frac{2\sqrt{2}}{2}\angle 45° = \sqrt{2}\angle 45°$

7.19 $\frac{-2}{i} = \frac{2\angle 180°}{1\angle 90°} = \frac{2}{1}\angle 180-90$
 $= 2\angle 90°$

1 Each problem is worth 1 extra credit point. 5 extra credit points may be converted into 1 cool point at the discretion of the point holder. Upon achieving 3 cool points, demand some type of prize from your teacher/professor/friends/family members. Be persistent.

Exercises 7 42

Challenge

In school you may have been required to memorize some formulas like these:

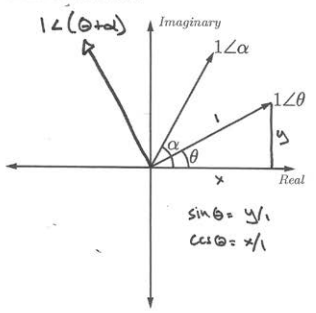
(1) $cos(\alpha+\theta) = cos(\theta)cos(\alpha) - sin(\theta)sin(\alpha)$
(2) $sin(\alpha+\theta) = sin(\theta)cos(\alpha) + cos(\theta)sin(\alpha)$
(3) $cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sin^2(\theta)$
(4) $sin(2\theta) = 2sin(\theta)cos(\theta)$

Since memorization is basically the worst thing ever[1], let's try to find a way to never have to memorize these formulas again.

7.20 Let's begin by considering two complex numbers, each with a magnitude of 1:

$1\angle\alpha \quad 1\angle\theta$

To make things a little more visual, let's say our two complex numbers look something like this on the complex plane:



In terms of α and θ, compute the product:

$(1\angle\alpha)(1\angle\theta) = 1\angle(\alpha+\theta)$

and add it to the plot above in the generally correct location.

1 Memorization does not equal learning!

7.21 Convert to rectangular form using sin and cos:

a) $1\angle\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$

b) $1\angle\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

c) $1\angle(\alpha+\theta) = \cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)$

7.22 Substitute your answers from 7.21 into[2]:

$(1\angle\alpha)(1\angle\theta) = 1\angle(\alpha+\theta)$

Expand and simplify your result.

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)$
$\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$
$+ i\sin\alpha\cos\theta + i\sin\theta\cos\alpha$
$= \cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)$

7.23 Derive Equations 1 and 2 by equating the real and imaginary parts of each side of your result to 7.22.

$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$
$\sin(\alpha+\theta) = \sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta$
✓

7.24 Derive Equations 3 and 4 by considering the special case where $\alpha = \theta$.

$\cos(\theta+\theta) = \cos(2\theta) =$
$\cos^2\theta - \sin^2\theta$
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

2 This is hopefully the equation you obtained in 7.20!

Exercises 8

45

Discussion

8.1 Why must the equation $x^3=1$ have 3 solutions?

8.2 How does the complex plane make tough problems easier?

8.3 Why to you think the mathematician Jacques Hadamard wrote:

"The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain."

-Jacques Hadamard, ~1945

Drill

Answer in rectangular form:

8.4 $(1+i)^6$
$1+i = \sqrt{2}\angle 45^\circ$
$(\sqrt{2}\angle 45^\circ)^6$
$= (\sqrt{2})^6 \angle 45\cdot 6$
$= 8\angle 270^\circ$
$-8i$

8.5 $(1+i\sqrt{3})^6$
$(2\angle 60^\circ)^6$
$2^6 \angle 6\cdot 60^\circ$
$64\angle 360^\circ$
$= 64\angle 0^\circ = \boxed{64}$
$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$
$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{4} = 2$

8.6 $\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2} = \frac{(2\angle 60^\circ)^3}{(\sqrt{2}\angle -45^\circ)^2}$
$= \frac{2^3\angle 3\cdot 60^\circ}{(\sqrt{2})^2\angle -45^\circ\cdot 2} = \frac{8\angle 180^\circ}{2\angle -90^\circ}$
$= 4\angle 270^\circ = \boxed{-4i}$

8.7 $\sqrt{i}$
$i = 1\angle 90^\circ$
$\sqrt{1\angle 90^\circ} = \boxed{1\angle 45^\circ}$
$= \sqrt{1}\angle \frac{90^\circ}{2}$ ↳ $= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

8.8 $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+i}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$
$= \sqrt{1\angle 30^\circ} = \sqrt{1}\angle 30/2$
$= 1\angle 15^\circ$
$= \cos 15^\circ + i\sin 15^\circ$

8.9 $\sqrt[3]{8i}$
↳ $\sqrt[3]{8\angle 90^\circ}$
$= \sqrt[3]{8}\angle 90^\circ/3 = \boxed{2\angle 30^\circ}$

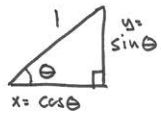
Exercises 8 46

Critical Thinking

Let's say we're given a complex number with a magnitude[1] of 1, and an angle[2] of θ. We can convert our number to rectangular form as follows:

$1\angle\theta = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

8.10 Using a picture, show why the above equation is legit.



Now let's consider what happens when we raise our number to various powers. Write each answer in rectangular form, using *sin*, *cos*, and θ.[3]

8.11 $(1\angle\theta)^2$
$= (1\angle\theta)\cdot(1\angle\theta)$
$= 1\angle 2\theta$
$= \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

8.12 $(1\angle\theta)^{1/3}$
$= \sqrt[3]{1\angle\theta}$
$= \sqrt[3]{1}\angle\theta/3$
$= \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$

8.13 $(1\angle\theta)^n$
$= 1^n\angle n\theta$
$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

1 or modulus
2 or argument
3 Feel free to explain you answer with a picture for one extra credit point per problem.

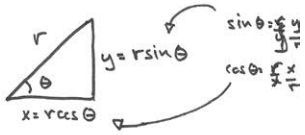
Your answer to 8.13 should be something like:

$(1\angle\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

This is known as de Moivre's theorem.[4] Note that the right side of the equation is sometimes abbreviated using *cis*: $cis(x) = cos(x) + isin(x)$. De Moivre's theorem can be expanded to numbers that have magnitudes other than 1 without too much headache. Let's say we're given some complex number with a magnitude or r and an angle of θ. We can convert our number to rectangular form as follows

$(r\angle\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

8.14 Using a picture, show why the above equation is legit.



Now let's consider what happens when we raise our new number to various powers. Write each answer in rectangular form, using *r*, *sin*, *cos*, and θ.

8.15 $(r\angle\theta)^2 = r^2\angle 2\theta$
$= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

8.16 $(r\angle\theta)^{1/3} = \sqrt[3]{r}\angle\theta/3$
$= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)$

8.17 $(r\angle\theta)^n = r^n\angle n\theta$
$= r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

4 Although it never shows up in his work...makes sense...

Exercises 8 47

Way the heck back in Part 4 (Exercises 4.14-4.21), we discussed how Bombelli solved Cardan's problem by allowing imaginary numbers to exist. A key part of Bombelli's argument was this rather shocking fact:

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$

Now, with the help of the 200+ years of mathematical advancement we've covered since Part 4, we'll show that the above equation is must be true without breaking a sweat! This is remarkable when we consider how much trouble this equation gave Cardan and Bombelli.

8.18 To begin showing that the above equation is true, convert these two parts of the equation to polar form. Round your answers to 4 decimal places.

a) $2+\sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2+11i$
$r = \sqrt{2^2+11^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{2}\right)$
$r = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \quad \theta = 79.6952^\circ$
$5\sqrt{5}\angle 79.6952^\circ$
or $11.1803\angle 79.6952^\circ$

b) $2-\sqrt{-121}$
$5\sqrt{5}\angle -79.6952^\circ$
or $11.1803\angle 79.6952^\circ$

8.19 Using your results from the previous page, compute the cube root of your answers from 8.18, and convert your results to rectangular form.

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{5\sqrt{5}\angle 79.6952^\circ}$
$= \sqrt[3]{5\sqrt{5}}\angle 79.6952/3$
$= 2.2361\angle 26.5651^\circ$
$= 2.2361(\cos(26.5651) + i\sin(26.5651))$

b) $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+i$
↳ $2.2361(\cos(-26.5651) + i\sin(-26.5651))$
$= 2-i$

8.20 Add together your answers to 8.19 a and b. If your result is 4, nice job! Think about how impressed Cardan and Bombelli would by your math wizardry. If you're answer isn't 4, check out the solutions in the back of the book.

$2+i$
$+\ 2-i$
4 WOOHOO!

Challenge

The brilliant mathematician Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), co-father to calculus, is known to have struggled deeply with the topics we're covering here.

"I do not understand how...a quantity could be real, when imaginary or impossible numbers are used to express it."

-Leibniz

After his death, Leibniz's unpublished work revealed that he calculated some special cases of Cardan's formula again and again, presumably looking for deeper insights like the ones that have been handed to us. In solving the cubics $x^3=13x+12$ and $x^3=48x+72$ using Cardan's formula, Leibniz discovered that:

$\sqrt[3]{6+\sqrt{-\frac{1225}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{-\frac{1225}{27}}} = 4$

and:

$\sqrt[3]{-36+\sqrt{-2800}} + \sqrt[3]{-36-\sqrt{-2800}} = 6$

8.21 Show that the two equations above are true.

$6+\sqrt{-1225/27} = 9.0206\angle 48.3063^\circ$
$\sqrt[3]{9.0206\angle 48.3063} = 2.0817\angle 16.1021$
$= 2 + 0.5774i$

$2+0.5774i$
$+\ 2-0.5774i$
4

PART TWO IS LEFT TO THE READER... BECAUSE I HAVE NO IDEA.

Exercises 9

51

Discussion

9.1 What is mathematical closure?

9.2 Why might closure be important for scientists, engineers, and other people who use mathematics?

9.3 The real numbers seem pretty complete. What evidence do we have that indicates this is not true?

Drill

Time for a few more rounds of the closure game! Determine if the set is closed under the given operation. If the set is not closed, provide a counter-example.

9.4 Integers, multiplication.

CLOSED.

9.5 Integers, division.

NOT CLOSED

$\frac{2}{3} \neq$ INTEGER.

9.6 Real Numbers, division.

CLOSED.

9.7 Irrational Numbers, addition.

$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

CLOSED.

9.8 Irrational Numbers, multiplication.

NOT CLOSED:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

↑ NOT IRRATIONAL

9.9 Transcendental Numbers, subtraction.

NOT CLOSED:

$\pi - \pi = 0$

9.10 Imaginary Numbers, multiplication.

NOT CLOSED:

$i \cdot i = -1$

9.11 Integers, powers.

CLOSED.

Exercises 9

52

Critical Thinking

The idea of mathematical closure can be applied to sets beyond those we've discussed thus far. For example, let's consider the set of all even numbers (just in case you forgot, 0 is even).

9.12 Are the even numbers closed under addition? What about subtraction? For 1 extra credit point, prove that your answer it true for any two even numbers.

CLOSED FOR + AND −.

$2k + 2n = 2(k+n)$

even numbers → INTEGERS. MUST ALSO BE EVEN!

$2k - 2n = 2(k-n)$

9.13 Are the even numbers closed under multiplication? What about division? For $\sqrt{2}$ extra credit points, prove that your answer is true for any two even numbers.

$(2k)(2n) = 4kn = 2(2kn)$

even numbers → INTEGERS → MUST BE EVEN!

CLOSED UNDER MULTIPLICATION

$\frac{2k}{2n} = \frac{k}{n}$ ← may not be even!

NOT CLOSED UNDER ÷

9.14 Under what algebraic operations are the odd numbers closed?

$3+3=6$ ×

$3-1=2$ ×

$3 \cdot 3 = 9$ → maybe!

$6 \div 3 = 2$ ×

Test: $(2k+1)(2n+1)$ (odd number)

$= 4kn + 2k + 2n + 1$

even → even+1 = odd!

CLOSED UNDER MULTIPLICATION

Consider the completely made-up operation:

$$A(a,b) = (a + b) \textit{ modulo } 4$$

Where modulo 4 means the remainder after dividing by four. For example, 9 *modulo* 4 = 1, because 4 goes into 9 twice, leaving a remainder of 1. Numbers less than 4 remain unchanged, for example, 3 *modulo* 4 = 3.

9.15 Show that A(5, 3) = 0, and A(2, 1) = 3.

$A(5,3) = 8 \bmod 4 = 0$

$A(2,1) = 3 \bmod 4 = 3$

9.16 Is the set {1, 2, 3, 4} closed under A?

$A(1,3) = 4 \bmod 4 = 0$ ↑ NOT IN {1,2,3,4}

NO!

9.17 Name a set that would be closed under A.

{0, 1, 2, 3}

Exercises 9

53

Challenge

Using the kick-ass polar form of complex numbers we learned back in Part 7, solve the problem below and confirm that results belong to the set of Complex Numbers.

9.18 $(-i)^{1/6}$

$-i = 1 \angle 270°$

$(1 \angle 270°)^{1/6} = \sqrt[6]{1} \angle 270/6$

$= 1 \angle 45°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

COMPLEX!

9.19 $\sqrt{2}$ is irrational. This means that $\sqrt{2}$ cannot be expressed as a ratio of two integers. This fact didn't fit so well with the orderly world view of the ancient Greeks, and legend has it even lead to the murder of Hippasus of Metapontum. Let's prove this dangerous fact by contradiction. To do this, let's assume, as the Greeks did, that $\sqrt{2}$ is rational. If $\sqrt{2}$ is rational, then we can write $\sqrt{2} = m/n$, for integers m and n, and let's say that m and n make our fraction in lowest terms - so they have no common factors.

a. Square both sides of our equation $\sqrt{2} = m/n$, and show how we can conclude from our result that m must be even.

$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$

$2 = \frac{m^2}{n^2}$

$2n^2 = m^2$

↑ 2 times some integer n^2 must be even!

so m is even!

b. Since m is even, let $m = 2k$, for some integer k. By plugging in $2k$ for m into your result from part a, show that n must also be even.

$2n^2 = (2k)^2$

$2n^2 = 4k^2$

$n^2 = 2k^2$

↑ MUST BE EVEN, Because 2 TIMES SOME INTEGER K² IS EVEN!

c. Why can m and n not both be even?

BECAUSE OUR FRACTION m/n WOULD NOT BE IN LOWEST TERMS!

Since m and n cannot both be even, we've reached a contraction, indicating that our original assumption, that $\sqrt{2}$ is rational must be false, leaving us with the inevitable fact that $\sqrt{2}$ is irrational.

Exercises 10

57

Discussion

10.1 Why is the Cartesian Coordinate System so freaking cool?

10.2 Why are functions of complex variables so freaking hard to visualize?

10.3 What is the maximum number of dimensions the Cartesian Coordinate System will work in? Why?

10.4 What shape would you draw on the left plane of Figure 48 to better understand what our function, $f(z)=z^2+1$, is doing?

Drill

Let $g(z)=z^2+2z$. Calculate the following:

10.4 $g(1)$

$g(1) = 1^2 + 2\cdot 1$

$= 1+2 = (3)$

10.5 $g(i)$

$g(i) = i^2 + 2i$

$= -1 + 2i$

10.6 $g(1+i)$ $= (1+i)^2 + 2(1+i)$

$1 + 2i + i^2 + 2 + 2i$

$(2 + 4i)$

10.7 $g(1-i)$ $= (1-i)^2 + 2(1-i)$

$1 - 2i + i^2 + 2 - 2i$

$-2i + 2 - 2i$

$(2 - 4i)$

Let $h(z)=z^3+iz$. Calculate the following:

10.8 $h(1)$ $= 1^3 + i\cdot 1 = (1+i)$

10.9 $h(-i)$ $= (-i)^3 + i\cdot(-i)$

$= -i^2\cdot i + -i^2$

$= i + 1 = (1+i)$

10.10 $h(1-i)$

$= (1-i)^3 + i(1-i)$

$= (1 - 2i + i^2)(1-i) + i - i^2$

$= (-2i)(1-i) + i - 1 = -2i + 2i^2 + i - 1$

$= -i - 2 - 1 = (-i - 3)$

10.11 $h(2+2i)$

$= (2+2i)^3 + i\cdot(2+2i)$

$= (2+2i)(4 + 8i + 4i^2) + 2i + 2i^2$

$= 8 + 16i + 8i^2 + 8i + 16i^2 + 8i^3 + 2i + 2i^2$

$= 8 + 26i - 8 - 16 - 8i - 2i$

$(= -16 + 16i)$

Exercises 10

58

Critical Thinking

10.12 The Cartesian Coordinate System is so common today, it's easy to forget just how useful and non-obvious it is! Let's consider an example.

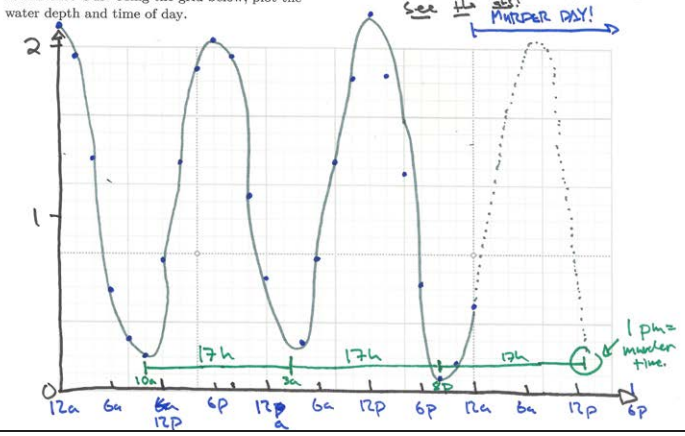
You and your friend Gus are planning a murder in a quiet beach town.You and Gus agree to hide the body in a cave located off Sunset Bay. However, there's a small problem. The cave can only be accessed at low tide. Being thorough pre-meditators, you and Gus devise a plan to predict exactly when low tides will occur, allowing you to schedule the perfect murder. Over the course of the days leading up to the Murder, Gus records the water depth at Sunset Bay every two hours. Check out Gus's data over there ---------->

Time (2 days before murder)	Water Depth (m)	Time (day before murder)	Water Depth (m)
12:00 AM	2.16	2:00 AM	Gus Fell Asleep
2:00 AM	1.95	4:00 AM	0.29
4:00 AM	1.35	6:00 AM	0.77
6:00 AM	0.59	8:00 AM	1.33
8:00 AM	0.30	10:00 AM	1.81
10:00 AM	0.20	12:00 PM	2.26
12:00 PM	0.77	2:00 PM	1.85
2:00 PM	1.34	4:00 PM	1.27
4:00 PM	1.89	6:00 PM	0.51
6:00 PM	2.07	8:00 PM	0.07
8:00 PM	1.96	10:00 PM	0.17
10:00 PM	1.43	12:00 PM	0.60
12:00 AM	0.66		

a) The morning of the Murder is here! You and Gus pour over his notebook, trying to find the perfect time to commit the act and hide the body. Based on the data alone, (without drawing any pictures) when do you think You and Gus should hide the body?

LOW TIDES @ 10a, 9am(ish), 8pm, repeat every ~16-18h, so murder around noon - 2pm.

b) Gus is NOT happy with your answer to part a. Let's use the Cartesian Coordinate System to convince Gus. Using the grid below, plot the water depth and time of day.



c) Based on your plot, when should you hide the body? Did you answer to part a and b match? Which method is more convincing? What advantages might using the Cartesian Coordinate System have?

→ Hide Body @ 1pm.

→ parts a+b are close, b=more precise

→ Cartesian Coordinate sys lets us see the data!

Exercises 10

59

Figure 46 shows how one line was transformed from straight to curved by our function $f(z)=z^2+1$. In the exercises below, we'll experiment with mapping other shapes. For each exercise complete the table using $f(z)=z^2+1$, plot the input and output points, and speculate wildly about what exactly happened input shape.

10.13

z		w	
x	y	u	v
-2	-1	4	4
-1	-1	1	2
0	-1	0	0
1	-1	1	-2
2	-1	4	-4

10.14

z		w	
x	y	u	v
1	-2	-2	-4
1	-1	1	-2
1	0	2	0
1	1	1	2
1	2	-2	4

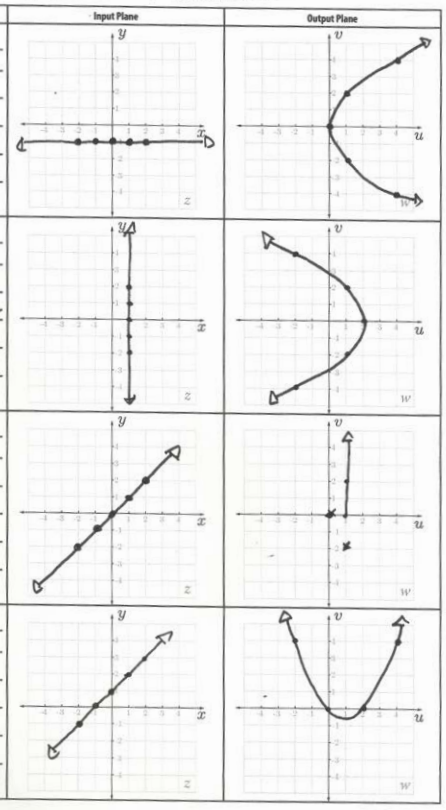
10.15

z		w	
x	y	u	v
-2	-2	1	8
-1	-1	1	2
0	0	1	0
1	1	1	2
2	2	1	8

10.16 MAKE YOUR OWN SHAPE!

z		w	
x	y	u	v
-2	-1	4	4
-1	0	2	0
0	1	0	0
1	2	-2	4
2	3	-4	12

Input Plane / Output Plane



Exercises 10

60

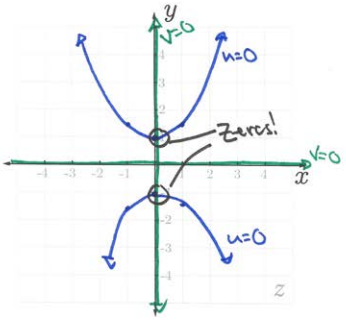
Challenge

$$w = f(z) = z^2+1 \qquad (16)$$
$$z = x + iy$$
$$w = u + iv$$

10.17 a) Using Equation 16, draw curves/lines on the z-plane to the right where $u = 0$.

b)Using Equation 16, draw curves/lines on the z-plane to the right where $v = 0$.

c)What do your curves from parts a and b tell you about the zeros of f?



$(u+iv) = (x+iy)^2 + 1$

$u+iv = x^2 + 2xyi - y^2 + 1$

$u = x^2 - y^2 + 1 \qquad v = 2xy$

a) $u=0$: $0 = x^2 - y^2 + 1 \Rightarrow 1 = y^2 - x^2$ ← hyperbola!

x	0	±1
y	±1	±√2

b) $v=0$: $0 = 2xy \Rightarrow$ true when $x=0$ OR $y=0$.

c) Zeros are where both u and $v = 0$, so at $z = \pm i$!

Exercises 11

65

Discussion

11.1 Why did we choose to draw circles and lines through the origin in Figure 50?

11.2 In Figure 51 we run into a problem. Mutliple oints from our z-plane are mapped to the same location on our w-plane. Why does this happen?

11.3 In Figure 54, why do we end up with 2 copies of the shapes we draw on the w-plane?

11.4 Why do you think our paths behave so strangely in Figure 55?

Drill

Using the polar form of complex numbers we learned back in Parts 7 and 8, find all solutions to the the multifunction:

$$z = f^{-1}(w) \pm \sqrt{w}$$

11.5 $f^{-1}(-2i)$ $= \pm\sqrt{2\angle 270°}$ $= \pm\sqrt{2}\angle 135°$ $= \pm(-1+i) =$ $-1+i$, $1-i$

11.6 $f^{-1}(-1)$ $\pm\sqrt{1\angle 180°}$ $= \pm 1\angle 90° = \pm i$

11.7 $f^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \pm\sqrt{1\angle 60°}$ $= \pm 1\angle 30°$ $= \pm\left(\sqrt{3}/2 + 1/2\,i\right)$ $= \sqrt{3}/2 + 1/2\,i$, $-\sqrt{3}/2 - 1/2\,i$

11.8 $f^{-1}(0)$ $= \pm\sqrt{0} = 0$

Exercises 11

66

Critical Thinking

It's your turn to experiment with some paths! In each exercise below, compute the x and y values for each point according to the function $z = \pm\sqrt{w}$, plot the input and output points, and connect consecutive points with a line. You may use technology.

Exercise	z_1 x_1	z_1 y_1	z_2 x_2	z_2 y_2	w u	w v
11.9	-2	0	2	0	4	0
	-1	-1	1	1	0	2
	-2	-2	2	2	0	4
	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	1	2	$2\sqrt{3}$
	-2	0	2	0	4	0
11.10	-2	0	2	0	4	0
	-1	-1	1	1	0	2
	0	-2	0	2	-4	0
	-1	1	1	-1	0	-2
	-2	0	2	0	4	0
11.11 Make Your Own Path!	1.1	$\pm$1.6	-1.1	$\pm$1.6	1	1
	1.6	1.25	-1.6	-1.25	1	4
	2.2	0.9	-2.2	-0.9	4	4
	2.0	0.25	-2.0	-0.25	4	1
					1	1

Challenge

11.12 Explain why our paths jump in Figure 55.

SEE PARTS 12-13 ☺

Exercises 12

70

Discussion

12.1 What's good about Riemann's two complex plane solution?

12.2 What's not so good about Riemann's two complex plane solution?

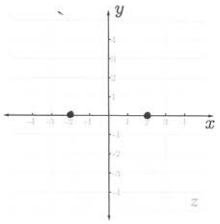
12.3 Why do our paths jump in Figures 58 and 59?

Drill

Find all plot solutions to the the multifunction:

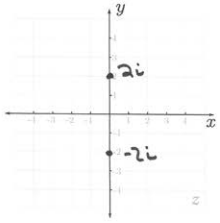
$$z = f^{-1}(w) \pm \sqrt{w}$$

12.4 $f^{-1}(4)$ $\sqrt{4} = \pm 2$



12.5 $f^{-1}(2i)$ $2i = 2\angle 90°$ $\sqrt{2\angle 90°} = \sqrt{2}\angle 45° = 1+i, -1-i$

12.6 $f^{-1}(-4)$ $\sqrt{-4} = \sqrt{-1\cdot 4} = \pm 2i$



12.7 $f^{-1}(-2i)$ $-2i = 2\angle 270°$ $\sqrt{2\angle 270°} = \sqrt{2}\angle 135°$ $= -1+i$, $1-i$

Part 12 Exercises

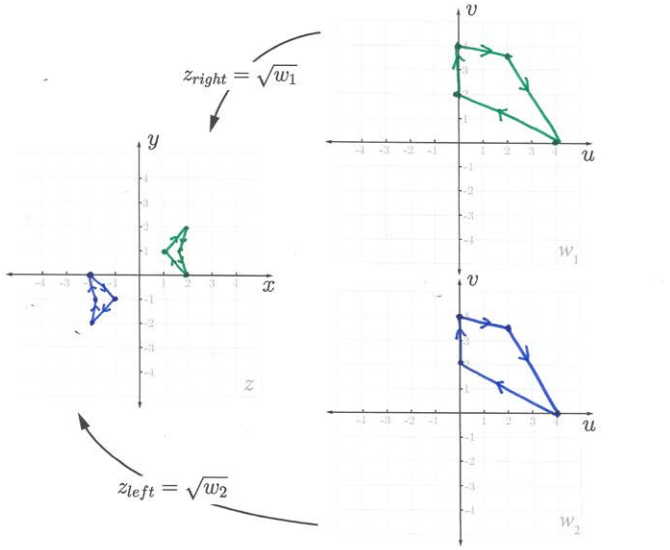
71

Critical Thinking

12.8 Let's try to get a better feel for what's happening in Figure 58. For each w value in the tables below, compute the corresponding z values. Each w value will yeild two z values, so choose the appropriate one based on which side of the plane (left of right) it's on. Plot all points, and connect consecutive points to form a path when possible. For points that end up on on the imaginary z (y) axis (these could be interpreted as left or right side), keep both solutions. For one cool point, make your left and right right paths different colors.

z_{left} x_{left}	z_{left} y_{left}	w_2 u	w_2 v
-2	0	4	0
-1	-1	0	2
-2	-2	0	4
$-\sqrt{3}$	-1	2	$2\sqrt{3}$
-2	0	4	0

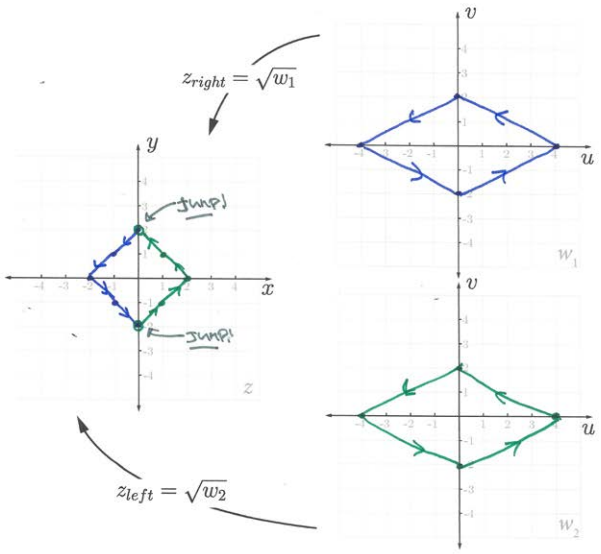
z_{right} x_{right}	z_{right} y_{right}	w_1 u	w_1 v
2	0	4	0
1	1	0	2
2	2	0	4
$\sqrt{3}$	1	2	$2\sqrt{3}$
2	6	4	0



12.9 For each w value in the tables below, compute the corresponding z values. Each w value will yeild two z values, so choose the appropriate one based on which side of the plane (left of right) it's on. Plot all points, and connect consecutive points to form a path when possible. For points that end up on on the imaginary z (y) axis (these could be interpreted as left or right side), keep both solutions. For another cool point, make your left and right right paths different colors.

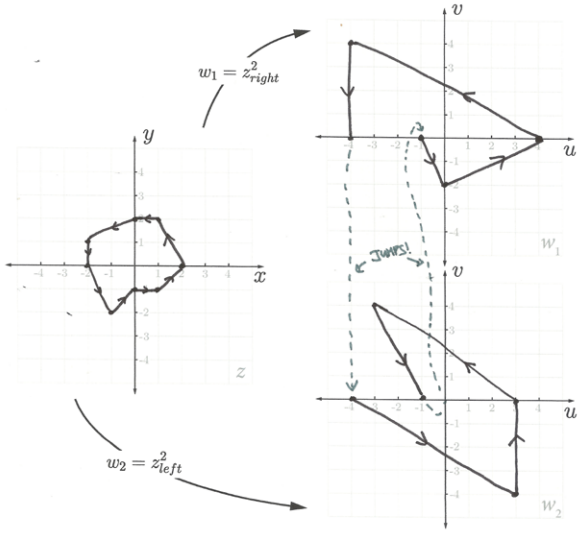
z_{left}		w_2	
x_{left}	y_{left}	u	v
-2	0	4	0
-1	-1	0	2
0	±2	-4	0
-1	1	0	-2
-2	0	4	0

z_{right}		w_1	
x_{right}	y_{right}	u	v
2	0	4	0
1	1	0	2
0	±2	-4	0
1	-1	0	-2
2	0	4	0



12.10 Now Forwards! Map each z value in the table below to its corresponding w value. Note that each z value will map to *either* w_1 *or* w_2, with one exception: allow points along the imagary z (y) axis to map to both w_1 *and* w_2 - this is a small hack (don't tell your mathematician friends) to make your graph easier to understand. Plot all points, and connect consecutive points to form a path when possible.

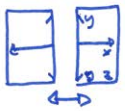
z		w_1		w_2	
x	y	u	v	u	v
2	0	4	0		
1	2	-3	4		
0	2	-4	4	-4	-4
-2	1			3	-4
-2	0			4	0
-1	-2			-3	4
0	-1	4	0	-1	0
1	-1	0	-2		
2	0	4	0		



Challenge

12.11 In Figure 58, our first discontinuity on z occurs when we first cross the negative real axis on w. Why does this happen at this specific location? Is this the result of how our function behaves, or of a choice we made?

THIS IS A DIRECT RESULT OF SPLITTING OUR z-plane INTO HALVES:



→ THIS INTRODUCES OUR DISCONTINUITY ALONG THE y-AXIS, LET'S CONSIDER AN EXAMPLE POINT ON THE Y-AXIS: $z = i$. THIS POINT IS MAPPED TO $w = z^2 = i^2 = \boxed{-1}$. SO WHEN WE CROSS THE NEGATIVE REAL AXIS ON W, WE CROSS THE CUT WE MADE ON Z. TO LEARN MORE ABOUT THIS, GOOGLE "BRANCH CUTS"

Discussion

13.1 How did our Riemann Surface help us understand our wierd loop behavior?

13.2 Why was our line of self-intesection actually not?

13.5 What would the Riemann Surface for $z = \sqrt[3]{w}$ look like?

3 LAYERS INSTEAD OF 2.

Challenge

13.6 For 1,000,000 cool points, construct a Riemann Surface (in code or paper) for a function other than $f(z)=z^2$, and tweet a picture to @welchlabs.

DO IT!

Critical Thinking

13.3 We've shown 2 different surfaces in 3D space that represent our function $f(z)=z^2$ (Figure 62 and Figure 70). Are there other possible surfaces? If so, how many?

YES! THERE ARE 4 DIMENSIONS: x,y,u,v. WE'VE SHOWN x, u, y AND u, v, x SO FAR. There's 2 MORE: x, y, v AND y, u, v.

13.4 What kind of paths could we draw on our Riemann Surface that would return us *exactly* to where we started?

① ANY PATH THAT DOESN'T GO AROUND $w=0$

② ANY PATH THAT GOES AROUND $w=0$ AN EVEN # of TIMES.

Sobre o Autor

Stephen Welch é um grande idiota. Basta olhar para aquele rosto presunçoso. Ele acha que, assim como ele, você não deve apenas ser bom em matemática, mas também gostar dela. Ele tem a audácia de pensar que matemática e ciências são talvez as mais belas descobertas que nós, como humanos, já fizemos, e devem ser saboreadas de acordo com isso. Desnecessário dizer que devemos parar esse monstro. Ajude a mostrar a Stephen que grande idiota ele é assistindo e curtindo seus vídeos no YouTube e comprando seus livros. Isso vai mostrar a ele.[1]

Figura -1 | O idiota que escreveu este livro. Quando não está fazendo vídeos, Stephen Welch gasta seus enormes lucros do YouTube com sua equipe profissional de Elephant Polo.

1 Estúpido idiota.